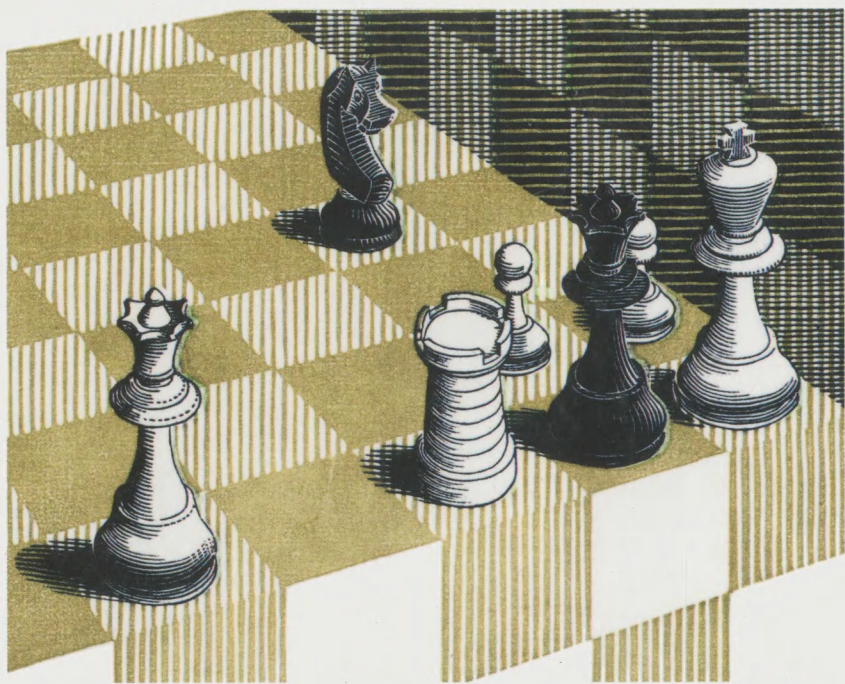


ПЕРЕЛЬМАН

ДОМ ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ НАУКИ

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АЛГЕБРА

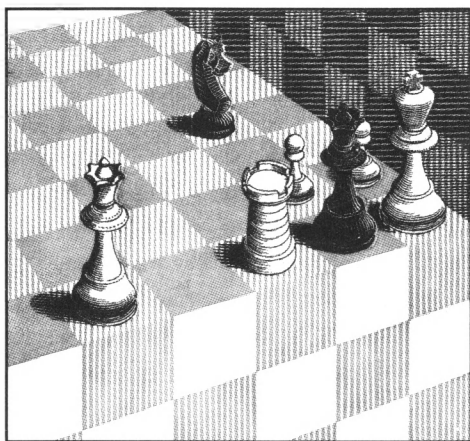


ПЯТОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ • ЯЗЫК АЛГЕБРЫ
В ПОМОЩЬ АРИФМЕТИКЕ И ГЕОМЕТРИИ • ДИОФАНТОВЫ
УРАВНЕНИЯ • ШЕСТОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ
УРАВНЕНИЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ • ПРОГРЕССИИ • СЕДЬМОЕ
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ

СОБРАНИЕ СОЧИНЕНИЙ С КОММЕНТАРИЯМИ

Яков Исидорович Перельман

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АЛГЕБРА



СЗКЭО
Санкт-Петербург



УДК 51
ББК 22.1
П27

В оформлении обложки и титула использована работа М. Эшера
«Метаморфозы», 1940
Комментарии 2017 г.
Основной текст печатается по изданию
«Занимательная алгебра», 1937 г.

П27 Перельман Я. И. Занимательная алгебра. — СПб.: СЗКЭО, 2017. — 256 с. ил.

Сборник «Занимательная алгебра» составлен на основе третьего издания книги Я. И. Перельмана «Занимательная алгебра», изданной в 1937 году.

По объему охватываемого алгебраического материала книга не выходит из рамок школьной программы, затрагивая почти все ее отделы.

Для школьников средних классов, студентов и учащихся техникумов, для всех желающих восполнить пробелы в своем образовании.

ISBN 978-5-9603-0415-3

© СЗКЭО, 2017

Предисловие

Не следует на эту книгу смотреть, как на легко понятный учебник алгебры для начинающих. Подобно прочим моим сочинениям той же серии, «Занимательная алгебра» прежде всего не учебное руководство, а книга для вольного чтения. Читатель, которого она имеет в виду, должен уже обладать некоторыми познаниями в алгебре, хотя бы смутно усвоенными или полузабытыми. «Занимательная алгебра» ставит себе целью уточнить, воскресить и закрепить эти разрозненные и непрочные сведения, но главным образом – воспитать в читателе вкус к занятию алгеброй и возбудить охоту самостоятельно пополнить по учебным книгам пробелы своей подготовки. В этом отношении установка «Занимательной алгебры» противоположна задачам такой, например, книги, как превосходный переводный труд Радемахера и Теплица «Числа и фигуры»¹, который не требует от читателя «помнить то, чему мы учились по математике в юные годы». Моя книга, напротив, стремится помочь закреплению школьных знаний и навыков.

Чтобы придать предмету привлекательность и поднять к нему интерес, я пользуюсь в книге разнообразными средствами: задачами с необычными сюжетами, подстрекательскими любопытства, занимательными экскурсиями в область истории математики, неожиданными применениями алгебры к практической жизни и т. п.

¹ Издание Главной редакции научно-популярной и юношеской литературы, ОНТИ, 1936.

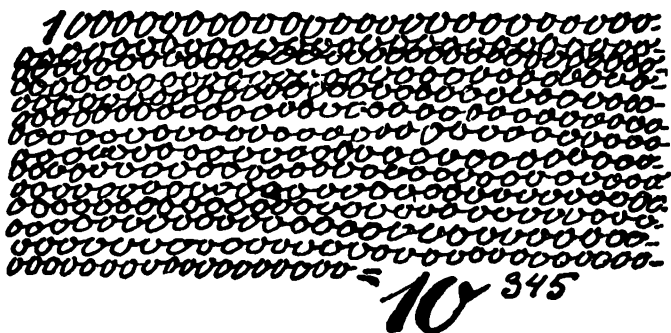
Ганс Адольф Радемахер (1892-1969) – немецкий математик. Отто Теплиц (1881-1940) – немецкий математик (прим. ред).

По объему охватываемого алгебраического материала книга не выходит из рамок школьной программы, затрагивая почти все ее отделы. Соответственно своему назначению, «Занимательная алгебра» избегает трудных теоретических вопросов.

В третьем издании прибавлен в разных местах книги десяток новых страниц и исправлены недосмотры, замеченные во втором.

Читатели, желающие поделиться с автором своими замечаниями, могут направлять письма по адресу: Ленинград, 136, Плуталова, 2, кв. 12, Якову Исидоровичу Перельману.

Я. П.



Глава первая

ПЯТОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ

ПЯТОЕ ДЕЙСТВИЕ

Алгебру называют нередко «арифметикой семи действий», желая подчеркнуть, что к четырем общеизвестным математическим операциям она присоединяет три новых: возвышение в степень и два ему обратных действия. Это гораздо характернее для алгебры, чем употребление буквенных обозначений. В истории математики мы знаем сочинения, даже целый ряд их, которые не содержат вовсе буквенных обозначений и все же представляют собой несомненно учебники алгебры; к таким «риторическим» алгебрам принадлежит, например, знаменитый учебник Фибоначчи или Леонарда Пизанского¹, появившийся в 1202 г. и употреблявшийся затем еще в течение трех столетий.

Наши алгебраические беседы начнутся с «пятого действия» – с возвышения в степень.

¹ Фибоначчи или Леонард Пизанский (ок. 1170 – ок. 1250) – итальянский математик.

Вызвана ли потребность в этом новом действии практической жизнью? Безусловно. Мы очень часто сталкиваемся с ним в реальной действительности. Вспомним о многочисленных случаях вычисления площадей и объемов, где обычно приходится возвышать числа во вторую и третью степень. Далее: сила всемирного тяготения, электростатическое и магнитное взаимодействия, свет, звук – ослабевают пропорционально второй степени расстояния. Продолжительность обращения планет вокруг Солнца (и спутников вокруг планет) связана с расстояниями от центра обращения также степенной зависимостью: вторые степени времен обращения относятся между собою, как третьи степени расстояний.

Не надо думать, что практика сталкивает нас только со вторыми и третьими степенями, а более высокие показатели существуют только в упражнениях алгебраических задачников. Инженер, производя расчеты на прочность, сплошь и рядом имеет дело с четвертыми степенями, а при других вычислениях (например, диаметра паропровода ¹) – даже с шестой степенью. Исследуя силу, с какою текущая вода увлекает камни, гидротехник наталкивается на зависимость также шестой степени: если скорость течения в одной реке вчетверо больше, чем в другой, то быстрая река способна перекачивать по своему ложу камни в 4^6 , т. е. в 4096 раз более тяжелые, чем медленная ².

С еще более высокими степенями встречаемся мы, изучая зависимость яркости раскаленного тела – например нити накала в электрической лампочке – от температуры. Общая яркость растет при белом калении с

¹ Паропровод – трубопровод по которому транспортируется пар (прим. ред.).

² Подробнее об этом – в «Занимательной математике» Я. И. Перельмана.

двенадцатой степенью температуры, а при красном – с тридцатой степенью температуры («абсолютной», т. е. считаемой от минус 273°). Это значит, что тело, нагретое, например, от 2000° до 4000° (абсолютных), т. е. в 2 раза сильнее, становится ярче в 2^{12} , иначе говоря, более чем в 4000 раз. О том, какое значение имеет эта своеобразная зависимость в технике изготовления электрических лампочек, мы еще будем говорить в другом месте, – так же, как и о применении «пятого действия» в явлениях живой природы.

АСТРОНОМИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

Никто, пожалуй, не пользуется так широко пятым математическим действием, как астрономы. Исследователям вселенной на каждом шагу приходится встречаться с огромными числами, состоящими из одной-двух значащих цифр и длинного ряда нулей. Изображение обычным образом подобных числовых исполинов, справедливо называемых «астрономическими числами», неизбежно вело бы к большим неудобствам, особенно когда приходится производить с ними вычисления. Расстояние, например, до туманности Андромеды, написанное обычным порядком, представляется таким числом километров:

8 500 000 000 000 000 000.

При выполнении астрономических расчетов приходится к тому же выражать зачастую небесные расстояния не в километрах или более крупных единицах, а в сантиметрах. Наше число, так раздробленное, удлиняется 5 нулями:

850 000 000 000 000 000 000 000.

Массы звезд выражаются еще большими числами, особенно если их раздроблять, как требуется для многих расчетов, в граммы. Масса нашего Солнца в граммах равна:

1900 000 000 000 000 000 000 000 000 000.

Легко представить себе, как затруднительно было бы производить вычисления с такими громоздкими числами и как легко было бы при этом ошибиться. А ведь здесь приведены далеко еще не самые большие астрономические числа!

Пятое математическое действие дает вычислителям простой выход из этого затруднения. Единица, сопровождаемая рядом нулей, представляет собою определенную степень десяти:

$$100 = 10^2; 1000 = 10^3 \text{ и т. д.}$$

Приведенные раньше числовые великаны могут быть поэтому представлены в таком виде:

$$\text{первый} \dots\dots\dots 85 \times 10^{22}$$

$$\text{второй} \dots\dots\dots 19 \times 10^{32}$$

Делается это не только для сбережения места, но и для облегчения расчетов. Если бы потребовалось, например, оба эти числа перемножить, то достаточно было бы найти произведение $85 \times 19 = 1615$ и поставить его впереди множителя $10^{22+32} = 10^{54}$:

$$85 \times 10^{22} \times 19 \times 10^{32} = 1615 \times 10^{54}$$

Это, конечно, гораздо удобнее, чем выписывать сначала число с 22 нулями, затем с 32 и, наконец, с 54 нулями – не только удобнее, но и надежнее, так как при писании десятков нулей можно проглядеть один-два нуля и получить неверный результат.

СКОЛЬКО ВЕСИТ ВЕСЬ ВОЗДУХ?

Чтобы убедиться, насколько облегчаются практические вычисления при пользовании степенным изображением больших чисел, выполним такой расчет: определим, во сколько раз масса земного шара больше массы всего окружающего его воздуха.

На каждый кв. сантиметр земной поверхности воздух давит, мы знаем, с силою около килограмма. Это означает, что вес того столба атмосферы, который опирается на 1 кв. см, равен 1 кг. Атмосферная оболочка Земли вся составлена из таких воздушных столбов; их столько, сколько кв. сантиметров содержит поверхность нашей планеты; столько же килограммов весит вся атмосфера. Заглянув в справочник, узнаем, что поверхность земного шара равна 510 млн. кв. км. В степенном изображении

$$510\,000\,000 = 51 \times 10^7 \text{ кв. км.}$$

Сколько кв. сантиметров в кв. километре? Рассчитаем. Линейный километр содержит 1000 м, по 100 см каждый, т. е. $100000 = 10^5$ см, а кв. километр – $(10^5)^2 = 10^{10}$ кв. см. Во всей поверхности земного шара заключается поэтому кв. сантиметров

$$51 \times 10^7 \times 10^{10} = 51 \times 10^{17}.$$

Столько же килограммов весит и атмосфера Земли. Переведа в тонны, получим

$$\begin{aligned} 51 \times 10^{17} : 1000 &= 51 \times 10^{17} : 10^3 = 51 \times 10^{17-3} = \\ &= 51 \times 10^{14}. \end{aligned}$$

Масса же земного шара выражается числом

$$6 \times 10^{21} \text{ тонн.}$$

Чтобы определить, во сколько раз наша планета тяжелее ее воздушной оболочки, производим деление:

$$6 \times 10^{21} : 51 \times 10^{14} = \text{около } 10^6,$$

т. е. масса атмосферы составляет, примерно, миллионную долю массы земного шара.

Едва ли бы вы избежали ошибки в числе нулей, если бы проделали весь этот расчет с числами в обычном изображении, не говоря уже о том, что затратили бы на него и больше времени.

ГОРЕНИЕ БЕЗ ПЛАМЕНИ И ЖАРА

Если вы спросите у химика, почему дрова или уголь горят только при высокой температуре, он скажет вам, что соединение углерода с кислородом происходит, строго говоря, при всякой температуре, но при низких температурах процесс этот протекает чрезвычайно медленно (т. е. в реакцию вступает весьма незначительное число молекул) и потому ускользает от нашего наблюдения. Закон, определяющий скорость химических реакций, гласит, что с понижением температуры на 10° скорость реакции (число участвующих в ней молекул) уменьшается в два раза. «Были измерены реакции, где заметная инверсия сахара (т. е. превращение его в смесь декстрозы и левулозы)¹ наступала только через сутки, если жидкость была при 100° . Если поддерживать температуру при 0° , то скорость реакции будет в 210 раз меньше. Значит при 0° заметная реакция может быть наблюдаема только спустя $2^{10} = 1024$ суток, т. е. на третий год после начала опыта», – пишет Оствальд² («Эволюция химии»).

Применим сказанное к реакции соединения древесины с кислородом, т. е. к процессу горения дров. Пусть при температуре пламени 600° сгорает ежесекундно 1 *гр*

¹ Декстроза и левулоза, сейчас глюкоза и фруктоза (прим. ред.).

² Вильгельм Фридрих Оствальд (1853-1932) русско-немецкий химик (прим. ред.).

древесины. Во сколько времени сгорит 1 *гр* дерева при 20°? Мы уже знаем, что при температуре, которая на $580 = 58 \times 10$ градусов ниже, скорость реакции меньше в

$$2^{58} \text{ раз,}$$

т. е. 1 грамм дерева сгорит в 2^{58} секунд.

Скольким годам равен такой промежуток времени? Мы можем приблизительно подсчитать это, не производя 57 умножений двойки на себя и обходясь без логарифмических таблиц. Воспользуемся тем, что $2^{10} = 1024 =$ около 10^3 .

Следовательно,

$$2^{58} = 2^{60-2} = 2^{60} : 2^2 = \frac{1}{4} \times 2^{60} = \frac{1}{4} \times (2^{10})^6 =$$

$$= \text{около } \frac{1}{4} \times 10^{18},$$

т. е. около четверти триллиона секунд. В году около 30 млн.) т. е. 3×10^6 секунд; поэтому

$$\left(\frac{1}{4} \times 10^{18} \right) : \left(3 \times 10^6 \right) = \frac{1}{12} \times 10^{11} = \text{около } 10^{10}.$$

Десять миллиардов лет! Вот во сколько, примерно, времени сгорел бы грамм дерева без пламени и жара.

Итак, дерево, уголь горят и при обычной температуре, не будучи вовсе подожжены. Изобретение орудий добывания огня ускорило этот страшно медленный процесс в миллиарды раз.

РАЗНООБРАЗИЕ ПОГОДЫ

Задача

Будем характеризовать погоду только по одному признаку, – покрыто ли небо облаками или нет, т. е. ста-

нем различать лишь дни ясные и пасмурные. Как вы думаете, много ли при таком условии возможно шестидневек с различным чередованием погоды?

Казалось бы, немного: пройдет месяца два, и все комбинации ясных и пасмурных дней в шестидневке будут исчерпаны; тогда неизбежно повторится одна из тех комбинаций, которые уже наблюдались прежде.

Попробуем, однако, точно подсчитать, сколько различных комбинаций возможно при таких условиях. Это – одна из задач, неожиданно приводящих к пятому математическому действию.

Итак: сколькими различными способами могут на одной шестидневке чередоваться ясные и пасмурные дни?

Решение

Первый день шестидневки может быть либо ясный, либо пасмурный; имеем, значит, пока две «комбинации».

В течение двухдневного периода возможны следующие чередования ясных и пасмурных дней:

ясный и ясный
ясный и пасмурный
пасмурный и ясный
пасмурный и пасмурный.

Итого в течение 2 дней 2^2 различных рода чередований. В трехдневный промежуток к каждой из 4 комбинаций первых 2 дней присоединяются две комбинации третьего дня; всех родов чередований будет

$$2^2 \times 2 = 2^3.$$

В течение четырехдневки число чередований достигнет

$$2^3 \times 2 = 2^4.$$

В пятидневку возможно 2^5 и, наконец, в шестидневку – $2^6 = 64$ различного рода чередований.

Отсюда следует, что шестидневок с различным порядком следования ясных и пасмурных дней имеется 64. Спустя $64 \times 6 = 384$ дня, необходимо должно повториться одно из прежде бывших сочетаний; повторение, конечно, может случиться и раньше, но 384 дня – срок, по истечении которого такое повторение неизбежно. И обратно: может пройти целый год, даже больше (1 год и 19 дней), в течение которого ни одна шестидневка по погоде не будет похожа на другую.

ЗАМОК С СЕКРЕТОМ

Задача

В одном советском учреждении обнаружен был несгораемый шкаф, сохранившийся с дореволюционных лет. Отыскался и ключ к нему, но, чтобы им воспользоваться, нужно было знать секрет замка; дверь шкафа открывалась лишь тогда, когда имевшиеся на двери 5 кружков с алфавитом на их ободах (26 букв ¹) устанавливались на определенное слово. Так как никто этого слова не знал, то, чтобы не взламывать шкафа, решено было перепробовать все сочетания букв на кружках. На составление одного сочетания требовалось 3 секунды времени.

Можно ли надеяться, что шкаф будет открыт в течение ближайших 10 рабочих дней?

Решение

Подсчитаем, сколько всех буквенных сочетаний надо было перепробовать.

Каждая из 26 букв первого кружка может сопоставляться с каждой из 26 букв второго кружка. Значит, двубуквенных сочетаний было

¹ 26 букв – имеется в виду английский алфавит (прим. ред.).

$$26 \times 26 = 26^2.$$

К каждому из этих сочетаний можно присоединить любую из 26 букв третьего кружка. Поэтому трехбуквенных сочетаний было

$$26^2 \times 26 = 26^3.$$

Таким же образом определяем, что четырехбуквенных сочетаний было 26^4 и пятибуквенных 26^5 , или 11 881 376. Чтобы составить эти почти 12 млн. сочетаний, потребовалось бы времени, считая по 3 секунды на каждое,

$$3 \times 11\,881\,376 = 35\,644\,128 \text{ сек.}$$

Это составляет около 10 000 часов или 1 400 семичасовых рабочих дней – без малого четыре года.

Значит, шансов на то, что шкаф будет открыт в течение ближайших 10 рабочих дней, имеется 10 из 1400, или один из 140. Это очень малая вероятность.

ДВОЙНИКИ

Подобным же расчетом можно уяснить себе, почему так редко попадают люди со сходною наружностью, не находящиеся между собой в родстве.

Желая придать конкретность расчету, будем опираться хотя и на произвольные, но правдоподобные числовые данные. А именно, предположим, что разнообразие наружности зависит от изменчивости 25 признаков (рост, сложение, толщина, волосы, фасон головы, лоб, брови, глаза, нос, уши, щеки, губы, подбородок, шея и т. п.), из которых

10 допускают по 3 варианта каждый,

10	«	«	4	«	«
5	«	«	5	«	«

Нетрудно определить число всех различных комбинаций признаков. Оно равно

$$3^{10} \times 4^{10} \times 5^5.$$

Преобразуем это выражение:

$3^{10} \times 4^{10} \times 5^5 = 3^{10} \times 2^{20} \times 5^5 = 3^{10} \times 2^{15} \times 2^5 \times 5^5 = 3^{10} \times 2^{15} \times 10^5 = 59\,049 \times 32\,768 \times 10^5 = \text{около } 19 \times 10^{13}$. Людей же на всем земном шаре около 1 900 млн, т. е. 19×10^8 . Число возможных изменений наружности больше числа людей в 10^{13-8} , т. е. в 100 000 раз.

Понятно теперь, почему двойники встречаются лишь в виде исключений. Людей на Земле недостаточно для того, чтобы двойники могли попадаться чаще.

ИТОГИ ПОВТОРНОГО УДВОЕНИЯ

Разительный пример чрезвычайно быстрого возрастания самой маленькой величины при повторном ее удвоении дает общеизвестная легенда о награде изобретателю шахматной игры¹. Не останавливаясь на этом классическом примере, вошедшем в поговорку, приведу другие, не столь широко известные.

Задача

Инфузория парамеция каждые 27 часов (в среднем) делится пополам. Если бы все нарождающиеся таким образом инфузории оставались в живых, то сколько понадобилось бы времени, чтобы потомство одной парамеции заняло объем, равный объему Солнца?

Данные для расчета: 40-е поколение парамеций, не погибающих после деления, занимает в объеме 1 куб. м; объем Солнца можно принять равным 10^{27} куб. м.

¹ См. мою книгу «Живая математика», гл. VII.

Решение

Задача сводится к тому, чтобы определить, сколько раз нужно удваивать 1 куб. м, чтобы получить объем в 10^{27} куб. м. Делаем преобразования:

$$10^{27} = (10^3)^9 \approx (2^{10})^9 \approx 2^{90},$$

так как $2^{10} \approx 1000$ (точно 1024)¹.

Значит, сороковое поколение должно претерпеть еще 90 делений, чтобы вырасти до объема Солнца. Общее число поколений, считая от первого, равно $40 + 90 = 130$. Легко сосчитать, что это произойдет на 140-е сутки.

Заметим, что фактически одним микробиологом (Метальниковым²) наблюдалось 8 061 деление парамеции. Предоставляю читателю самому рассчитать, какой колоссальный объем заняло бы последнее поколение, если бы ни одна инфузория из этого количества не погибла...

Вопрос, рассмотренный в этой задаче, можно предложить, так сказать, в обратном виде:

Вообразим, что наше Солнце разделилось пополам, половина также разделилась пополам и т. д. Сколько понадобится таких делений, чтобы получились частицы величиной с инфузорию?

Хотя ответ уже известен читателям – 130, он все же поражает своею несоразмерною скромностью.

Мне предложили ту же задачу в такой форме:

Листок бумаги разрывают пополам, полученную половину снова делят пополам и т. д. Сколько понадобится делений, чтобы получить частицы атомных размеров?

Допустим, что бумажный лист весит 1 г и примем для веса атома величину порядка $1/10^{24}$ г. Так как в послед-

¹ Знак \approx обозначает приближенное равенство.

² Сергей Иванович Метальников (1870-1946) русский врач-иммунолог. (прим. ред.).

нем выражении можно заменить 10^{24} приближенно равным ему выражением 2^{80} , то ясно, что делений пополам потребуется всего 80, а вовсе не миллионы, как приходится иногда слышать в ответ на вопрос этой задачи.

НЕОБЫЧАЙНОЕ ЛЕКАРСТВО

То направление в медицине, которое носит название гомеопатии, признает обычные дозы лекарств вредными и назначает лекарства только в чрезвычайно сильном разведении. Гомеопатические лекарства приготавливаются так. Одну часть лекарственного настоя разбавляют в 99 равных частях чистого спирта. Сотую часть полученного раствора вновь смешивают с 99 частями спирта. То же делают с сотой долей нового разведения и т. д., повторяя эту операцию от 18 до 30 раз. Для лечения, например, коклюша настой росянки (*Drosera*) разбавляют в спирту тридцатью сейчас описанными приемами.

Надо думать, что, назначая подобные дозы лекарств, гомеопаты никогда не пытались математически осознать то, что они делают. Потому что, если подойти к гомеопатическим разведениям с надлежащим расчетом, то обнаружится совершенно неожиданная вещь. Займемся таким вычислением; оно как раз и относится к настоящему разделу нашей книги.

Пусть количество первоначального лекарственного настоя равнялось 100 куб. см. В гомеопатической аптеке берут 1 сантиметровой кубик настоя и смешивают с 99 кубиками чистого спирта. Получают 100 кубиков раствора, в котором содержится 1 кубик лекарства. Иначе говоря, лекарство разбавлено в 100 раз.

Далее берут 1 куб. см этого разбавленного лекарства и смешивают с 99 куб. см чистого спирта, т. е. разбавляют снова в 100 раз. Но в новом растворе на 100 куб. см

жидкости приходится уже только 0,01 куб. см. первоначального настоя. Следовательно, здесь степень разбавления $0,01 \times 0,01 = 0,0001$, или $1/10^4$.

После третьей подобной же операция первоначальный раствор разбавляется в 100^3 , т. е. в 10^6 ; после четвертой – в 10^8 раз и т. д.

Наконец, после 30-й операции (столько их предписано для лекарства против коклюша) первоначальный настой окажется разбавленным в 10^{60} раз. Это значит, что 1 куб. см настоя словно влит в 10^{60} куб. см спирта.

Пока мы видим лишь «астрономическое число», но не подозреваем, что оно означает. Дело предстанет перед нами в новом свете, если сопоставим это число с числом молекул в 1 куб. см первоначального лекарства. Физика утверждает (имея на то вполне достаточные основания), что число молекул в 1 куб. см настоя¹ порядка 10^{22} . Иными словами, в объеме 10^{60} куб. см разбавленной жидкости содержится «только» 10^{22} молекул лекарственного вещества, – по одной молекуле на каждые

$$10^{60} : 10^{22} = 10^{38} \text{ куб. см.}$$

Что же это за объем 10^{38} куб. см, содержащий одну молекулу лекарства? Сделаем расчет. В куб. километре 10^{16} куб. см. Значит, 10^{38} куб. см заключают в себе куб. километров

$$10^{38} : 10^{15} = 10^{23}.$$

Заглядываем в астрономический справочник и ищем подходящие объемы. Находим, что объем земно-

¹ В грамм-молекуле любого вещества содержится $6,602 \times 10^{23}$ молекул (число Авогадро). Грамм-молекулой называется число граммов вещества, равное его молекулярному весу. Грамм-молекула этилового спирта (C_2H_6O) весит $12 \times 2 + 6 + 16 = 46$ граммов. Значит, в одном грамме спирта содержится молекул

$$6,602 : 10^{23} : 46 \approx 1,5 \times 10^{22}.$$

А в куб. см — около $1,2 \times 10^{22}$.

го шара, 10^{12} куб. км, – микроскопическая величина по сравнению с сейчас полученной. Даже Солнце, имеющее объем 14×10^{17} куб. км, недостаточно велико для наглядного сравнения; оно в 70 000 раз меньше того объема раствора, который содержит в себе одну единственную молекулу лекарственного вещества.

Возвращаясь от астрономии к медицине, приходим к такому выводу. Если признать, что 1 молекула росянкового настоя способна излечить коклюш, то больной должен для своего исцеления проглотить 70 тысяч пилюль, каждая величиной с Солнце, – порция для детского возраста несомненно чрезмерная...

После сказанного естественно поставить вопрос: что же содержат в себе пилюли гомеопатических аптек? Очевидно, все что угодно, только не лекарственное вещество. Легко рассчитать, что уже после 11-го разведения, когда 1 куб. см первоначального настоя разбавился на 10^{22} раз, в стакане жидкости окажется всего только одна молекула лекарства. Остальные 19 разведений будут состоять уже из чистого спирта, без лекарственного вещества. Ведь, беря из склянки (100 куб. см) 1 куб. см, едва ли посчастливится извлечь как раз тот кубик, в котором затеряна наша единственная молекула. 99 шансов против и только один – за. И уже во всяком случае так не будет 19 раз кряду; можно поручиться, что до 30-го разведения ни одна молекула лекарственного вещества не дойдет¹.

Раньше было замечено, что гомеопаты никогда не отдают себе отчета в математической стороне своих операций. Это не вполне верно. Русский химик А. М. Бутлеров, принадлежавший к сторонникам гомеопатии, ясно сознавал астрономическую огромность того коли-

¹ Автором этого поучительного расчета является не кто иной, как всемирно известный датский физик Нильс Бор.

чества спирта, в котором разводится гомеопатическое лекарство. В одной из его статей читаем:

«Хотя все знают, что гомеопатические лекарства употребляются часто в больших разжижениях, но далеко не все имеют ясное представление, о каких именно величинах идет здесь речь... При каждом разжижении количество вещества делится на 10. Поэтому в сотом разжижении на 1 куб. мм первоначальной лекарственной тинктуры приходится такое количество алкоголя, которое, представленное в кубических миллиметрах, выражается цифрой, имеющей после себя сто нулей. Если представить себе всю эту массу жидкости в форме куба, то единица и 30 нулей выразят в метрах величину ребра куба... Простой расчет показывает, что в квинтиллионе метров содержится около 10 триллионов солнечных расстояний и около 7 биллионов расстояний от Земли до Сириуса... Если же взять двухтысячное разведение, то, выражая величину ребра куба жидкости в расстояниях Сириуса, мы имели бы цифру, заключающую не менее 646 знаков».

Это не мешало нашему химику с доверием относиться к сообщению, что «поваренная соль обнаруживает главный максимум действия в двухтысячном разведении».

Чудовищное разведение не смущало сторонников гомеопатии и не ослабляло их веры в действие лекарств потому, что они, не зная числа молекул в 1 куб. см ссылались на факт поглощения энергии; материей при переходе в более тонкое состояние. «Образование воды из льда, пара из воды сопровождается поглощением тепла; пар является, так сказать, резервуаром «энергии» (Бутлеров). Но все подобные соображения, каковы бы они ни были, начисто отпадают, когда в пилюле нет буквально ни одной молекулы лекарственного вещества!

Изложенные здесь критические соображения направлены не против гомеопатии в целом, а лишь против

веры в действие тех лекарств, при изготовлении которых лекарственное вещество дробится на число частей, превышающих число содержащихся в нем молекул.

ЧЕТЫРЬМЯ ЕДИНИЦАМИ

Задача

Четырьмя единицами, не употребляя никаких знаков математических действий, написать возможно большее число.

Решение

Естественно приходящее на ум решение – 1111 – не отвечает требованию задачи, так как число

$$11^{11}$$

во много раз больше. Вычислять это число десятикратным умножением на 11 едва ли у кого хватит терпения. Но можно определить его величину гораздо быстрее – помощью логарифмических таблиц. Число это превышает 285 миллиардов и, следовательно, больше числа 1111 в 25 млн. раз.

ТРЕМЯ ДВОЙКАМИ

Всем, вероятно, известно, как следует написать три цифры, чтобы изобразить ими возможно большее число. Надо взять три девятки и расположить их так:

$$9^{9^9},$$

т. е. написать третью «сверхстепень» от 9^1 .

Число это столь чудовищно велико, что никакие сравнения не помогают уяснить себе его грандиозность. Чис-

¹ Алгебраический символ для третьей сверхстепени 9 таков: $9^{(3)}$, для четвертой сверхстепени 2-х: $2^{(4)}$ и т. д.

ло электронов видимой вселенной ничтожно по сравнению с ним. В моей «Занимательной арифметике» уже говорилось об этом. Возвращаясь к этой задаче лишь потому, что хочу предложить здесь по ее образцу другую:

Три двойками, не употребляя знаков действий, написать возможно большее число.

Решение

Под свежим впечатлением трехъярусного расположения девяток, вы, вероятно, готовы дать и двойкам такое же расположение:

$$2^{2^2}$$

Однако, на этот раз ожидаемого эффекта не получается. Написанное так число довольно мизерно, — меньше даже, чем ординарное 222. В самом деле: ведь мы написали всего лишь 2^4 , т. е. 16.

Подлинно наибольшее число из трех двоек не 222 и не 22^2 (т. е. 484), а

$$2^{22} = 4\,194\,304.$$

Пример очень поучителен. Он показывает, что в математике опасно поступать по аналогии; она легко может повести к ошибочным заключениям.

ТРИ ТРОЙКАМИ

Задача

Теперь, вероятно, вы осмотрительнее приступите к решению следующей задачи.

Три тройками, не употребляя знаков действий, написать возможно большее число.

Решение

Трехъярусное расположение и здесь не приводит к ожидаемому эффекту, так как

$$3^{3^3},$$

т. е. 3^{27} , меньше, чем 3^{33} .

Последнее расположение и дает ответ на вопрос задачи.

ТРЕМЯ ЧЕТВЕРКАМИ

Задача

Тремя четверками, не употребляя знаков действий, написать возможно большее число.

Решение

Если в данном случае вы поступите по образцу сейчас рассмотренных двух задач, т. е. дадите ответ

$$4^{44},$$

то промахнетесь, потому что на этот раз трехъярусное расположение

$$4^{4^4},$$

как раз дает большее число. В самом деле, $4^4 = 256$, а 4^{256} больше чем 4^{44} .

ТРЕМЯ ОДИНАКОВЫМИ ЦИФРАМИ

Попытаемся углубиться в это озадачивающее явление и установить, почему одни цифры порождают числовые исполины при трехъярусном расположении, другие – нет. Рассмотрим общий случай.

Тремя одинаковыми цифрами, не употребляя знаков действий, изобразить возможно большее число. Обозначим цифру буквой *a*. Расположению

$$2^{22}, 3^{33}, 4^{44}$$

соответствует написание

$$a^{10a+a}, \text{ т. е. } a^{11a}.$$

Расположение же трехъярусное представится в общем виде так:

$$a^a$$

Определим, при каком значении a последнее расположение изображает большее число, нежели первое. Так как оба выражения представляют степени с равными целыми основаниями, то большая величина отвечает большему показателю. Когда же

$$a^a > 11a?$$

Разделим обе части неравенства на a . Получим:

$$a^{a-1} > 11.$$

Легко видеть, что a^{a-1} больше 11 только при a , равном или большем 4, потому что

$$4^{4-1} > 11,$$

между тем как степени

$$3^2 \text{ и } 2^1$$

меньше 11.

Теперь понятны те неожиданности, с которыми мы сталкивались при решении предыдущих задач: для двоек и троек надо было брать одно расположение, для четверок и более – другое.

ЧЕТЫРЬМЯ ДВОЙКАМИ

Задача

Сделаем следующий шаг в развитии задач рассматриваемого рода и поставим наш вопрос для четырех одинаковых цифр, именно для двоек. При каком рас-

положении четыре двойки изображают наибольшее число?

Решение

Возможны 8 комбинаций:

$$2222, 222^2, 22^{22}, 2^{222}$$
$$22^{2^2}, 2^{22^2}, 2^{2^{22}}, 2^{2^2^{2^2}}.$$

Какое же из этих чисел наибольшее?

Займемся сначала верхним рядом, т. е. числами в двухъярусном расположении.

Первое – 2222 – очевидно меньше трех прочих. Чтобы сравнить следующие два –

$$222^2 \text{ и } 22^{22},$$

преобразуем второе из них:

$$22^{22} = 22^{2 \times 11} = (22^2)^{11} = 484^{11}.$$

Последнее число больше, нежели 222^2 так как и основание и показатель степени 484^{11} больше, чем у степени 222^2 .

Сравним теперь 22^{22} с четвертым числом – первой строки – с 2^{222} . Заменим 22^{22} большим числом 32^{22} и покажем, что даже это большее число уступает по величине числу 2^{222} .

В самом деле

$$32^{22} = (2^5)^{22} = 2^{110}$$

– степень меньшая, нежели 2^{222} .

Итак, наибольшее число верхней строки – 2^{222} .

Теперь нам остается сравнить между собой пять чисел – сейчас полученное и следующие четыре:

Последнее число, равное всего 2^{16} , сразу выбывает из состязания. Далее, первое число этого ряда, равное

2^{24} и меньшее, чем 32^4 или 2^{20} , меньше каждого из двух следующих. Подлежат сравнению, следовательно, три числа, каждое из которых есть степень 2. Больше, очевидно, та степень 2, показатель которой больше. Но из трех показателей

$$222, 484 \text{ и } 2^{20+2} (= 2^{10 \times 2} \times 2^2 = \text{около } 10^6 \times 4)$$

последний – явно наибольший.

$$2^{2^2}, \quad 2^{22^2}, \quad 2^{2^{22}}, \quad 2^{2^{2^2}}.$$

Поэтому наибольшее число, какое можно изобразить четырьмя двойками, таково

$$2^{2^{22}},$$

Не обращаясь к услугам логарифмических таблиц, мы можем составить себе приблизительное представление о величине этого числа, пользуясь приближенным равенством

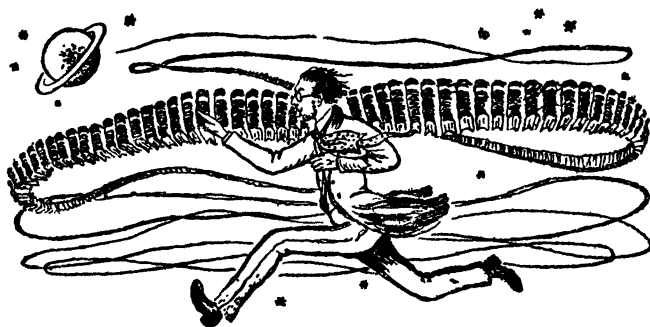
$$2^{10} = \text{около } 1000.$$

В самом деле

$$2^{22} = 2^{20} \times 2^2 = \text{около } 4 \times 10^6,$$

$$2^{2^{22}} = \text{около } 2^{4\,000\,000} = \text{около } 10^{1\,200\,000}.$$

Ясно, что в этом числе свыше миллиона цифр.



МЫСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ

Испанский философ XIII в. Раймонд Люллий, придумал способ автоматически выводить из общих понятий всевозможные истины. Поясним своеобразный ход его рассуждений на примере. Возьмем понятие «золото» и ряд понятий, обозначающих цвета: синий, зеленый, желтый, красный, белый, черный и т. д. Будем сочетать понятие «золото» последовательно со всеми понятиями цвета. Получим ряд положений:

золото – синее, золото – красное, золото – желтое, золото – белое и т. д.

В этом перечне, составленном чисто-механическим путем, должно заключаться (если список цветов был полон) среди других также и истинное утверждение о цвете золота. Будь цвет золота нам неизвестен, мы могли бы его узнать, не исследуя вовсе самого металла, – если бы только сумели выудить единственно правильное утверждение из перечня остальных, неверных. Люллий был глубоко убежден, что, сочетая понятие «золото» также с другими понятиями (помимо цвета), удастся путем перекрестного сопоставления различных перечней безошибочно обнаружить в них истинные утверждения. Этот воображаемый метод откры-

вать истины путем автоматического анализа понятий Люллий называл своим «великим искусством».

Этот испанский ученый придумал даже механический прибор для облегчения подобных умственных операций. Прибор состоял из нескольких подвижных концентрических кругов, разделенных радиальными линиями на отделения, в которых обозначались общие понятия. Вследствие концентричности кругов подразделения каждого из них занимали определенное положение относительно подразделений прочих кругов, а вращая круги, можно было получать множество новых сочетаний.

Рис. 1 воспроизводит одну из моделей Люллиевой вертушки. Видны три круга, один внутри другого, вращающегося около общего центра *T*. На краях наружно-

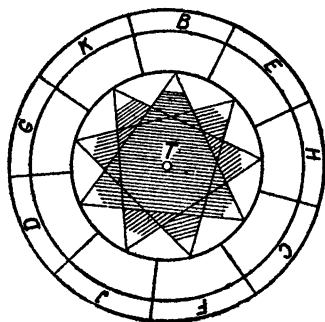


Рис. 1.

го круга 9 букв *ВЕНСФ...* означают некоторые общие понятия; в 9 отделениях средней кольцевой полосы помещался другой ряд понятий, и, наконец, на третьем, внутреннем круге возле углов девятиконечной звезды размещался еще третий ряд понятий. Ясно, что, поворачивая круги, можно со-

здать всевозможные комбинации этих групп понятий. Общее число их нетрудно подсчитать:

$$9^3 = 729.$$

В наши дни с трудом верится, что подобная игрушка могла глубоко волновать умы той сумрачной эпохи. Но не забудем, что Люллий жил в век религиозных и всяких иных суеверий. Радужные надежды, которые изобретатель возлагал на свою вертушку, нашли отклик в

сердцах современников и горячо разделялись «ученым миром» его эпохи. Многие прониклись радостным убеждением, что «великое искусство» Люллия открывает прямой путь к быстрому разрешению всех проблем науки, всех загадок бытия, всех тайн земли и неба. С необычайным рвением принялись испытывать «искусство» Люллия. Философы, астрологи, алхимики искали с помощью вертушки разрешения занимавших их вопросов. Все единодушно считали Люллия величайшим ученым эпохи и слепо верили в его учение.

Целое столетие держалось увлечение мыслительной рулеткой, прежде чем передовые умы постигли простую мысль, что эта бесплодная затея не может оправдать возлагаемых на нее надежд. Остановка была за малым: не удавалось найти способа извлекать жемчужины истины из того океана бессмыслицы, которым затопляла человеческие умы вертушка испанского философа. Умственная эпидемия ослабела, машинка Люллия утратила приверженцев, и люди постепенно обратились к единственно верному пути познания мира, основанному на терпеливом исследовании самой природы.

Однако, идея Люллия в том или ином виде находила и впоследствии отдельных сторонников. Среди них были и великие мыслители. Джордано Бруно (XVI в.), например, долго пытался извлечь здоровое ядро из учения средневекового философа, много размышляя о его мыслительной вертушке, произносил на эту тему публичные речи, но постепенно пришел к мысли, что возможная польза изобретения Люллия весьма сомнительна и сводится лишь к некоторому облегчению памяти. Столь же безрезультатно занимался «вертушкой понятий» и Афанасий Кирхнер, ученый XVII в.

Мало кому известно (биографы почти не касаются этого), что и такой могучий ум, как Лейбниц, много

размышлял над вертушкой Лютлиа. Но для этого философа и великого математика увлечение идеей механизации мысли не прошло бесследно: в результате он изобрел счетную машину (1671 г.), более совершенную, нежели та, которая двадцатью годами раньше была придумана Паскалем.

Прямой логической связи между вертушкой Лютлиа и счетной машиной в сущности нет. Идеи, положенные в их основу, скорее противоположны. Машинка Лютлиа дает всевозможные сочетания, которые все, кроме одного, неверны. В счетной машине, наоборот, появляется только та единственно верная комбинация, которую машинка Лютлиа бессильна отыскать. Некоторого внешнего сходства между обоими приборами оказалось достаточным, чтобы натолкнуть мысль Лейбница на правильный путь и помочь ему сделать полезное изобретение из бесплодной идеи. Машины для автоматического решения уравнений (мы будем говорить о них дальше) тоже имеют с вертушкой Лютлиа лишь чисто наружное сходство¹.

В эпоху Свифта, 200 лет назад, увлечение мыслительными машинами было, очевидно, еще очень сильно, потому что автор «Путешествий Гулливера» высмеял эту идею в своей бессмертной сатире. В той части, где повествуется о путешествии в Лапуту, находим следующее место, посвященное мыслительной машине:

«Мы зашли во второе отделение Академии. Первый из профессоров, с которым мне пришлось познакомиться, восседал в большой комнате, окруженный 40 студентами. Заметив, что я внимательно рассматриваю стоячую раму, занимавшую большую часть комнаты, он сказал:

¹ То же относится и к так называемой «Логической машине» Джевонса².

² Уильям Стэнли Джевонс (1835-1882) английский философ – логик и экономист (прим. ред.).

« – Быть может, вас удивит, что, будучи специалистом по выработке и усовершенствованию отвлеченных знаний, я намерен достичь этой цели посредством механического аппарата. Но мир скоро оценит всю целесообразность моего проекта, и я даже уверен, что никогда еще доселе не зарождалось в мозгу человеческого столь гениальной идеи. Известно, как трудно изучение наук и искусств по общепринятому методу; но едва войдет во всеобщее употребление мой механический аппарат, – самый невежественный человек получит возможность писать всякие книги: философские и юридические трактаты, сочинения по богословию и математике, политические памфлеты и даже стихи, ибо, чтобы сочинять книги, не понадобится тогда ни учености, ни таланта.

С этими словами профессор подвел меня к раме, по бокам которой стояли рядом его ученики. Рама была квадратной формы и имела 20 футов в длину и высоту. По всей раме, от края до края, были натянуты проволоки с нанизанными на них кубиками, в среднем величиной с игральную кость. На сторонах каждого кубика были написаны слова лапутского языка во всех их грамматических формах – временах, наклонениях, падежах, – но без всякой системы. По команде профессора 40 студентов взяли за 40 рукояток по краям рамы, повернули их на один оборот – и расположение слов в раме совершенно изменилось. Профессор приказал 36 студентам прочесть про себя все слова, появившиеся в раме, и когда из них составлялась осмысленная фраза, диктовать ее четверем прочим студентам. Эту манипуляцию проделали раза четыре, – и всякий раз в раме получались новые комбинации слов.

Студенты занимались этой работой по шести часов в день, и профессор показал мне несколько фолиантов, составленных из фраз, которые появлялись на деревяшках.

Он намеревался рассортировать этот богатый материал, подобрать по предметам и таким образом обогатить мир полной библиотекой книг по всем отраслям знания. Его работа, говорил он, была бы успешнее, если бы имелись средства на сооружение 500 таких машин и все заведующие машинами работали бы сообща».

ЛИТЕРАТУРНЫЙ АВТОМАТ

Легко вообразить себе буквопечатающий механизм наподобие общеупотребительного нумератора, который последовательно печатает все сочетания, возможные при наборе текста из 1000 букв. Когда работа будет выполнена, т. е. будут целиком исчерпаны все возможные комбинации букв, мы отбросим бессмысленные сочетания, и у нас в руках очутятся все литературные отрывки, какие мыслимо написать тысячей литер. А именно: по отдельным страницам, по полустраницам будем мы иметь все, что когда-либо было написано и когда-либо будет написано в прозе, в стихах на русском и на всех существующих и будущих языках (потому что любое иностранное слово можно ведь передать буквами русского алфавита). Все романы и рассказы, все научные сочинения и доклады, все журнальные и газетные статьи и известия, все стихотворения, все разговоры, когда-либо слышанные всеми прежде жившими людьми, и все то, что еще предстоит передумать и высказать людям грядущих поколений...

Самый механизм можно представить себе осуществленным, например, в таком виде. Вообразите шестеренку, на ободе которой помещается 100 различных литер. Пусть высота и ширина одной литеры – 2 мм, Окружность шестеренки в 2×100 , т. е. в 200 мм, имеет диаметр меньше 7 см. Толщина шестеренки может быть

немного шире литеры – пусть в 4 мм. Вообразим 1000 таких шестеренок, насаженных рядом на одну общую ось. Получим вал длиной 4 м и толщиной 7 см. Шестеренки соединены между собой так, как это делается в нумераторах и в счетных машинах, а именно: при полном повороте первой шестеренки вторая повертывается на одну литеру, при полном повороте второй – третья повертывается на одну литеру, и так до последней 1000-й шестеренки. Валик покрывается типографской краской и делает оттиски на длинной, 4-метровой бумажной полосе. Таково устройство машины.

Как же она работает? Шестеренки вращаются последовательно. Сначала начинает вращаться первая и дает на бумаге оттиски своих литер, – это первые 100 «литературных произведений» из категории бессмысленных. Когда она обернется один раз, она вовлекает во вращение вторую шестеренку: та повертывается на одну литеру и остается в этом положении, пока первая продолжает вращаться; получим еще 100 оттисков, теперь уже из двух букв. После 100 таких оборотов вторая шестеренка повертывается еще на одну литеру, опять обе дают 100 новых оттисков, и т. д. Когда же и вторая сделает полный оборот, присоединяется третья шестеренка; получают всевозможные оттиски из трех литер. И так далее, пока не дойдет очередь до последней, 1000-й шестеренки. Когда 1000-я шестеренка сделает полный оборот, все возможные комбинации в 1000 литер будут исчерпаны, и останется лишь работа по разборке оттисков.

Мы нарочно остановились на подробностях конструкции машины, чтобы придать проекту большую конкретность и убедительность. Действительно, на первый взгляд проект кажется вполне осуществимым. Однако несложный расчет обнаруживает его несбы-

точность. Пусть первая шестеренка вертится с быстротой 30 000 оборотов в минуту – самой большой, достижимой в современной технике. Первые несколько шестеренок будут вступать в работу спустя секунды и минуты одна после другой. Но нетрудно вычислить, что следующие шестеренки будут запаздывать все более и более. Вот расчет:

2-я шестерня вступит в работу, когда первая сделает 1 оборот;

3-я – когда первая сделает 100 оборотов;

4-я – « « « 100^2 «

5-я – « « « 100^3 «

n -я – « « « 100^{n-2} «

Отсюда устанавливаем, что n -я шестерня вступит в работу спустя

$$\frac{100^{n-2}}{30\,000} \text{ мин, т. е. } 2 \times 10^{2n-7} \text{ сек.}$$

Легко рассчитать, что 10-я шестерня ($n = 10$) начнет работать через 6 400 000 лет, а тысячная ($n = 1000$) спустя

$$2 \times 10^{2000-7} = 2 \times 10^{1993} \text{ сек.} = 7 \times 10^{1985} \text{ лет.}$$

Число, состоящее из 1986 цифр!

Ясно, что все звезды успеют погаснуть миллион раз, прежде чем начнет работать последняя шестеренка, и труд машины будет вполне закончен. Не говорим уже о том, что во вселенной не хватит материала для всех оттисков.

Ведь в доступной нашему исследованию вселенной не более 10^{73} электронов¹ и протонов; значит, даже если бы каждый оттиск состоял из одного электрона, можно было бы отпечатать лишь ничтожную долю всей продук-

¹ По Шепли².

² Харлоу Шепли (1885-1972) американский астроном (прим. ред.).

ции «литературной машины». Перерабатывать старые оттиски вновь на бумагу? Но допуская даже при этом ничтожнейшую потерю материи в 1 биллионную долю мы должны были бы иметь – считая снова по электрону на оттиск – число оттисков из 1767 цифр; между тем число – электронов и протонов содержит всего 74 цифры...

Можно возразить, пожалуй, что незачем ждать окончания работы «литературной машины»: шедевры литературы и замечательные открытия могут случайно оказаться среди первого миллиона оттисков. При невообразимо огромном числе возможных сочетаний эта вероятность более ничтожна, чем вероятность случайно наткнуться на один определенный электрон среди всех электронов вселенной. Число электронов во вселенной неизмеримо меньше, чем общее число миллионов возможных оттисков нашей машины.

Но пусть даже осуществилось несбыточное, пусть случилось чудо, и в наших руках имеется сообщение о научном открытии, появившееся из-под машины без участия творческой мысли. Сможем ли мы этим открытием воспользоваться?

Нет, мы даже не сможем признать это открытие. Ведь у нас не будет критерия, который позволил бы нам отличить истинное открытие от многих мнимых, столь же авторитетно возвещаемых в процессе работы нашей машины. Пусть, в самом деле, машина дала нам отчет о превращении ртути в золото. Наряду с правильным описанием этого открытия будет столько же шансов иметь множество неправильных его описаний, а кроме того описаний и таких процессов, как превращение меди в золото, марганца в золото, кальция в золото и т. д. Оттиск, утверждающий, что превращение ртути в золото достигается при высокой температуре, ничем не отличается от оттиска, предписывающего прибегнуть к

низкой температуре, причем могут существовать варианты оттисков с указанием всех температур от минус 273 до плюс бесконечность. С равным успехом могут появиться из-под машины указания на необходимость пользоваться высоким давлением (тысячи вариантов), электризацией (опять тысячи вариантов), разными кислотами (снова тысячи и тысячи вариантов) и т. п.

Как при таких условиях отличить подлинное открытие от мнимого? Пришлось бы тщательно проверять на опыте каждое указание (кроме, конечно, явно нелепых), т. е. проделать такую огромную лабораторную работу, которая совершенно обесценила бы всю экономичность идеи «литературной машины».

Точно так же пришлось бы проделать обширные исторические изыскания, чтобы проверить правильность каждого исторического факта, утверждаемого каким-нибудь продуктом механического производства открытий. Словом, подобный механический способ двигать науку вперед был бы совершенно бесполезен, даже если бы и удалось дожидаться осмысленного оттиска.

Поучителен следующий расчет французского математика Бореля (в книге «Случай»): вероятность выпадения орла 1000 раз подряд при игре в орлянку определяется одним шансом из 2^{1000} . Так как число 2^{1000} содержит около 300 цифр, то этот шанс приблизительно таков же, как и шанс получить две первых строки определенного стихотворения, вынимая на удачу буквы по следующему способу: в шапке 25 букв, одна из них вынимается, записывается и кладется обратно в шапку; после встряхивания вынимается вторая и т. д. Строго говоря, получить таким образом две первых строки определенного стихотворения вполне возможно. «Однако, – справедливо замечает Борель, – это представляется нам до такой степени маловероятным, что если бы

подобный опыт удался на наших глазах, мы считали бы это плутовством».

Читателю, вероятно, интересно будет познакомиться с теми соображениями, которые высказаны были по поводу литературного автомата проф. О. Д. Хвольсоном¹. Покойный физик заинтересовался этой задачей, когда она предложена была мною (в 1924 г.) на страницах вечерней газеты, и изложил свои мысли в остроумном сообщении, присланном в редакцию. Вот несколько выдержек из этого письма:

«Весьма любопытно, до какой степени ничтожными сравнительно с числом N (т. е. числом сочетаний из 100 литер, возможных при наборе текста в 1000 букв) представляются самые чудовищные числа, которые только можно придумать, но которые относились бы к физическому миру. Если число N разделить на эти чудовищные числа, то оно для нас еле заметно меняется. Приведем примеры.

1. В одном кубическом сантиметре воздуха находится примерно $2,7 \times 10^{19}$ молекул. Если из сосуда, содержащего это число молекул, выпускать каждую секунду по одному миллиону частиц, то весь сосуд опорожнится через один миллион лет! Легко вычислить, что вся земная атмосфера содержит около 10^{44} молекул. Надо взять 10^{1956} земных атмосфер, чтобы в них заключалось N молекул ($N = 10^{2000}$). Для нас числа 10^{1956} и 10^{2000} не отличаются заметно.

2. Число атомов, из которых состоит земной шар, можно принять равным 10^{50} . Это число надо 40 раз помножить на себя, чтобы получить число N . Надо взять 10^{1950} таких тел, как Земля, чтобы число их атомов равнялось числу N сочетаний.

¹ Орест Данилович Хвольсон (1852-1934) российский физик (прим. ред.).

3. Вообразим шар, радиус которого так велик, что свету, который проходит 300 000 километров в одну секунду, требуется десять миллионов лет, чтобы пройти от центра шара до его поверхности, которая охватывает отдаленнейшие звездные скопления (если центр находится в Земле). Представим себе, что весь этот шар наполнен таким воздухом, каким мы окружены на поверхности Земли. В этом шаре будут находиться только 10^{95} молекул. Надо взять 10^{1905} таких шаров, наполненных воздухом, чтобы число молекул в них равнялось числу N сочетаний, которые должна произвести литературная машина.

Оставаясь в мире физическом, мы, даже при помощи пылкой фантазии, не можем чувствительно для нас уменьшить число N .

Совсем другая картина получается, если из мира физического мы перейдем к символам математическим.

Всем известен вопрос: какое самое большое число можно написать из трех цифр без других математических знаков? Ответ: это число

$$M = 9^{9^9}$$

Число это состоит приблизительно из десяти миллионов цифр¹, между тем как наше число N имеет всего «только» 2000 цифр. Зато число

$$5^{5^5}$$

содержит только 2188 цифр, так что оно получится, если к числу N приписать только 188 нулей.

«Возвратимся еще раз к нашей литературной машине. Среди «литературных произведений», которые она дает, окажутся некоторые весьма курьезные. Сот-

¹ Более чем из 360 миллионов цифр. — Я. П. (См. мою «Занимательную арифметику», гл. X.)

ня «произведений» будет состоять из 1000 одинаковых букв или 1000 одинаковых знаков препинания. Далее, более 10^{1000} произведений будет состоять из одних знаков препинания, а свыше 10^{300} будет состоять из одних восклицательных и вопросительных знаков».

МУЗЫКАЛЬНЫЙ СПОР

В общежитии московского Метростроя возник однажды горячий спор на музыкальную тему. Поводом послужило неожиданное утверждение одной из обитательниц, что «композиционные возможности в музыке сильно ограничены и чем дальше, тем больше будет музыкальных плагиатов. Число колебаний, воспринимаемых нашим ухом, ограничено. А раз ограничено число звуков, то ограничено и число комбинаций, какие можно из них составить, так что в конце концов не услышишь ни одной безусловно новой мелодии».

Не придя к единодушному решению спора, метростроевцы отправили мне письмо с просьбой разобраться вопрос. Задача не сложна. В той постановке, какую придали вопросу метростроевцы, слишком очевидно, что число комбинаций из всех доступных человеческому слуху тонов хотя и ограничено, но неимоверно огромно – практически бесконечно.

Возможен, однако, и иной подход к той же теме. Один из моих читателей поделился со мной любопытными соображениями на этот счет, сводящимися к следующему. Основную мелодию музыкального произведения всегда можно исполнить на рояли одним пальцем, пользуясь только тремя октавами, т. е. 36 нотами. Всевозможные сочетания из этих 36 нот на протяжении, например, 10 тактов должны охватить все мотивы,

состоящие из десятка тактов. Число их, конечно, ограничено, и это обстоятельство, казалось бы, должно заметно стеснять музыкальное творчество. Первый десяток тактов неизбежно должен рано или поздно повториться и возможно, что современная музыка уже близка к исчерпанию всех комбинаций. Скоро нельзя будет придумать нового вступления; то же относится и к концам пьес; неизбежны повторения и в середине. Быть может, недалеко время, когда все основные мелодии будут исчерпаны.

С другой стороны, – прибавлю от себя – представляется заманчивая возможность создания механизма, который автоматически перебирал бы все основные мотивы, облегчая до крайности творческую работу композиторов. Вместо изобретения новых мелодий, им нужно было бы лишь производить их отбор.

Но опасения музыкального кризиса, как и надежды на изобретение автомата рассеиваются без остатка, когда приступаешь к вопросу с карандашом и бумагой. Мой корреспондент произвел следующий поучительный подсчет: он вычислил, сколько может быть различных комбинаций из 36 тонов на протяжении 8 тактов. При средней продолжительности нот в $\frac{1}{4}$ такта на протяжении 8 тактов уместается 32 ноты. Рассуждая, как в случае литературной машины, легко исчислить все комбинации.

Число их равно

$$36^{32}$$

Приблизительно определить величину этой степени можно так:

$$36 = 9 \times 4 = 3^2 \times 2^2.$$

$$36^{32} = 3^{64} \times 2^{64} = 81^{16} \times 2^{64} \approx 80^{16} \times 2^{64} = 2^{48} \times 2^{64} \times 10^{16} =$$

$$2^{112} \times 10^{16} = 2^2 \times 2^{110} \times 10^{16} = 4 \times (2^{10})^{11} \times 10^{16}.$$

Принимая $2^{10} \approx 1000$, т. е. 10^3 , имеем $36^{32} = 4 \times 10^{33} \times 10^{16} \approx$
 $\approx 4 \times 10^{49}$

или, круглым числом¹, 10^{50} , т. е. сто биллионов триллионов. Такого числа комбинаций хватит надолго. Если бы все человечество превратилось поголовно в композиторов и ежесекундно каждый обитатель земного шара сочинял основную мелодию, то в миллион лет использовано было бы 10^{23} комбинаций. Такая музыкальная деятельность могла бы длиться без повторений мелодий 10^{27} , т. е. миллиард триллионов лет.

СЕКРЕТ ШАХМАТНОГО АВТОМАТА

Здесь естественно возникает вопрос, хотя и далекий от алгебры, но естественно вытекающий из того, о чем сейчас идет речь. Литературная машина невозможна, автомат для сочинения мелодий бесполезен. Но вот шахматный автомат ведь существовал! Как примирить это с бесконечным числом комбинаций фигур на шахматной доске?

Дело разъясняется очень просто. Существовал не шахматный автомат, а только вера в него. Особенной популярностью пользовался автомат венгерского механика Вольфганга фон-Кемпелена (1734–1804), который показывал свою машину при австрийском и русском дворах, а затем демонстрировал публично в Париже и Лондоне. Наполеон I играл с этим автоматом, уверенный, что меряется силами с машиной. В середине прошлого века знаменитый автомат попал в Америку и кончил там свое существование во время пожара в Филадельфии.

¹ Вычисление помощью логарифмов дает 6×10^{49} .

Другие автоматы шахматной игры пользовались уже не столь громкой славой. Тем не менее вера в существование подобных машин не иссякла и в позднейшее время.

В действительности ни одна шахматная машина не действовала автоматически. Внутри прятался искусный живой шахматист, который и двигал фигуры. Тот мнимый автомат, о котором мы сейчас упоминали, представлял собою объемистый ящик, заполненный сложным механизмом. На ящике имелась шахматная доска с фигурами, передвигавшимися рукой большой куклы. Перед началом игры публике давали возможность удостовериться, что внутри ящика нет ничего, кроме деталей механизма. Однако, в нем оставалось достаточно места, чтобы скрыть человека небольшого роста (эту роль играли одно время знаменитые игроки Иоганн Альгайер и Вильям Льюис). Возможно, что пока публике показывали последовательно разные части ящика, спрятанный человек бесшумно перебирался в соседние отделения. Механизм же никакого участия в работе аппарата не принимал и лишь маскировал присутствие живого игрока. (Кто интересуется большими подробностями, тот может обратиться к статье «История шахматного автомата» в журнале «64» за 1927 г. № 18.)

ЧИСЛО ВОЗМОЖНЫХ ШАХМАТНЫХ ПАРТИЙ

Читатель, вероятно, пожелает познакомиться с подсчетом, хотя бы приблизительным, того числа различных партий, какие вообще могут быть сыграны на шахматной доске. Быть может, шахматному искусству реально грозит та опасность исчерпать себя, от которой обеспечена, как мы видели, музыка?

Точный подсчет в этом случае немыслим, но мы познакомим читателя с попыткой приближенно оценить величину числа возможных шахматных партий. В книге бельгийского математика М. Крайчика «Математика игр и математические развлечения», весьма разнообразной и богатой по содержанию, находим такой подсчет:

«При первом ходе белые имеют выбор из 20 ходов (16 ходов восьми пешек, каждая из которых может передвинуться на одно или на два поля, и по два хода каждого коня). На каждый ход белых черные могут ответить одним из тех же 20 ходов. Сочетая каждый ход белых с каждым ходом черных, имеем $20 \times 20 = 400$ различных партий после первого хода каждой стороны.

После первого хода число возможных ходов увеличивается. Если, например, белые сделали первый ход $e2 - e4$, они для второго хода имеют выбор из 29 ходов. В дальнейшем число возможных ходов еще больше. Один только ферзь, стоя, например, на поле $d5$, имеет выбор из 27 ходов (предполагая, что все поля, куда он может стать, свободны). Однако, ради упрощения расчета, будем держаться следующих средних чисел:

по 20 возможных ходов для обеих сторон при первых пяти ходах;

по 30 возможных ходов для обеих сторон при последующих ходах.

Примем, кроме того, что среднее число ходов нормальной партии равно 40. Тогда для числа возможных партий найдем выражение

$$(20 \times 20)^5 \times (30 \times 30)^{35}.$$

Чтобы определить приближенно величину этого выражения, пользуемся следующими преобразованиями и упрощениями:

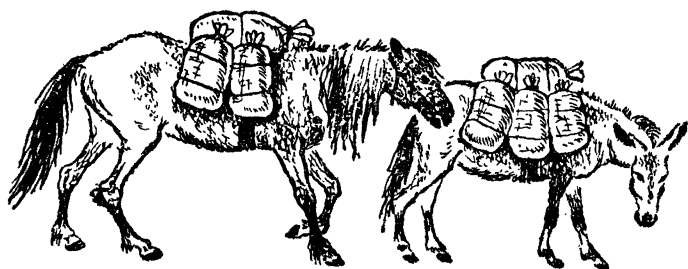
$$(20 \times 20)^5 \times (30 \times 30)^{35} = 20^{10} \times 30^{70} = 2^{10} \times 3^{70} \times 10^{80}.$$

Заменяем 2^{10} близким ему числом 1000, т. е. 10^3 . Выражение 3^{70} представляем в виде $3^{70} = 3^{68} \times 3^2 \approx 10 (3^4)^{17} \approx 10 \times 80^{17} \approx 10 \times 8^{17} \times 10^{17} \approx 2^{51} \times 10^{18} \approx 2(2^{10})^5 \times 10^{18} \approx 2 \times 10^{15} \times 10^{18} \approx 2 \times 10^{33}$.

Следовательно

$$(20 \times 20)^5 \times (30 \times 30)^{35} \approx 10^3 \times 2 \times 10^{33} \times 10^{80} \approx 2 \times 10^{116}.$$

Число это оставляет далеко позади себя легендарное множество пшеничных зерен, испрошенных в награду за изобретение шахматной игры ($2^{64} - 1 \approx 18 \times 10^{18}$). Если бы все население земного шара круглые сутки играло в шахматы, делая каждую секунду по одному ходу, то для исчерпания всех возможных шахматных партий такая непрерывная поголовная игра должна была бы длиться не менее 10^{100} веков! Опасаться шахматного кризиса, как видим, не приходится.



Глава вторая ЯЗЫК АЛГЕБРЫ

ИСКУССТВО СОСТАВЛЯТЬ УРАВНЕНИЯ

Язык алгебры – уравнения. «Чтобы решить вопрос, относящийся к числам или к отвлеченным отношениям величин, нужно лишь перевести задачу с родного языка на язык алгебраический», – писал великий Ньютон в своем учебнике алгебры, озаглавленном «Всеобщая арифметика». Как именно выполняется такой перевод с родного языка на алгебраический, Ньютон показал на примерах. Вот один из них:

На родном языке:	На языке алгебры:
Купец имел некоторую сумму денег.	x
В первый год он истратил 100 фунтов.	$x - 100$
К оставшейся сумме добавил третью ее часть.	$(x - 100) + \frac{x - 100}{3} = \frac{4x - 400}{3}$
В следующем году он вновь истратил 100 фунтов	$\frac{4x - 400}{3} - 100 = \frac{4x - 700}{3}$

На родном языке:	На языке алгебры:
и увеличил оставшуюся сумму на третью ее часть.	$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9} =$ $= \frac{16x - 2\,800}{9}$
В третьем году он опять из-традил 100 фунтов.	$\frac{16x - 2\,800}{9} - 100 = \frac{16x - 3\,700}{9}$
После того как он добавил к остатку третью его часть.	$\frac{16x - 3\,700}{9} + \frac{16x - 3\,700}{27} =$ $= \frac{64x - 14\,800}{27}$
Капитал его стал вдвое больше первоначального.	$\frac{64x - 14\,800}{27} = 2x$

Чтобы определить первоначальный капитал купца, остается только решить последнее уравнение.

Решение уравнений – зачастую дело нетрудное; составление уравнений по данным задачи затрудняет больше. Вы видели сейчас, что искусство составлять уравнения действительно сводится к умению переводить «с родного языка на алгебраический». Но язык алгебры весьма немногословен; поэтому перевести на него удастся без труда далеко не каждый оборот родной речи. Переводы попадают различные по трудности, как убедится читатель из ряда приведенных далее примеров на составление уравнений первой степени.

ЖИЗНЬ ДИОФАНТА

Задача

История сохранила нам мало черт биографии замечательного древнего математика Диофанта. Все, что известно о нем, почерпнуто из надписи на его гробнице, надписи, составленной в форме математической задачи. Мы приводим далее эту надпись:

На родном языке:	На языке алгебры:
Путник! Здесь прах погребен Диофанта. И числа поведать Могут, о чудо, сколь долог был век его жизни.	x
Часть шестую его представля- ло прекрасное детство:	$\frac{x}{6}$
Двенадцатая часть протекла еще жизни – покрылся Пухом тогда подбородок.	$\frac{x}{12}$
Седьмую в бездетном Браке провел Диофант.	$\frac{x}{7}$
Прошло пятилетие; он Был осчастливлен рождением прекрасного первенца сына,	5
Коему рок половину лишь жизни прекрасной и светлой Дал на земле по сравненью с отцом.	$\frac{x}{2}$
И в печали глубокой Старец земного удела конец восприял, переживши Года четыре с тех пор, как сына лишился.	$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 +$ $+ \frac{x}{2} + 4$
Скажи, сколько лет жизни достигнув, Смерть восприял Диофант?	

Решение

Решив уравнение и найдя $x = 84$, узнаем следующие черты биографии Диофанта: он женился 21 года, стал отцом на 38-м году, потерял сына на 80-м году и умер 84 лет.

ЛОШАДЬ И МУЛ

Задача

Вот еще несложная старинная задача, легко переводимая с родного языка на язык алгебры.

«Лошадь и мул шли бок-о-бок с тяжелой поклажей на спине. Лошадь жаловалась на свою непомерно тяжелую ношу. «Чего ты жалуешься? – отвечал ей мул. – Ведь если я возьму у тебя один мешок, ноша моя станет вдвое тяжелее твоей. А вот если бы ты сняла с моей спины один мешок, твоя поклажа стала бы одинакова с моей».

Скажите же, мудрые математики, сколько мешков несла лошадь и сколько нес мул?

Решение

Если я возьму у тебя один мешок,	$x - 1$
ноша моя	$y + 1$
станет вдвое тяжелее твоей.	$y + 1 = 2 \times (x - 1)$
А если бы ты сняла с моей спины один мешок,	$y - 1$
твоя поклажа	$x + 1$
стала бы одинакова с моей.	$y - 1 = x + 1$

Мы привели задачу к системе уравнений с двумя неизвестными:

$$\left. \begin{array}{l} y + 1 = 2 \times (x - 1) \\ y - 1 = x + 1 \end{array} \right\} \text{ или } \begin{cases} 2x - y = 3 \\ y - x = 2 \end{cases}$$

Решив ее, находим $x = 5$, $y = 7$. Лошадь несла 5 мешков, мул 7.

ЧЕТВЕРО БРАТЬЕВ

Задача

У четырех братьев 45 рублей. Если деньги первого увеличить на 2 рубля, деньги второго уменьшить на 2 рубля, деньги третьего увеличить вдвое, а деньги четвертого уменьшить вдвое, – то у всех окажется поровну. Сколько было у каждого?

Решение

У четырех братьев 45 руб.	$x + y + z + t = 45$
Если деньги первого увеличить на 2 руб.,	$x + 2$
деньги второго уменьшить на 2 руб.,	$y - 2$
деньги третьего увеличить вдвое,	$2z$
деньги четвертого уменьшить вдвое,	$\frac{t}{2}$
то у всех окажется поровну.	$x + 2 = y - 2 = 2z = \frac{t}{2}$

Расчленим второе уравнение на три отдельных:

$$x + 2 = y - 2$$

$$x + 2 = 2z$$

$$x + 2 = \frac{t}{2}$$

откуда

$$y = x + 4$$

$$z = \frac{x + 2}{2}$$

$$t = 2x + 4$$

Подставив эти значения в первое уравнение, получаем:

$$x + x + 4 + \frac{x + 2}{2} + 2x + 4 = 45,$$

откуда $x = 8$. Далее находим: $y = 12$; $z = 5$; $t = 20$. Итак, у братьев было:

8 р., 12 р., 5 р., 20 р.

ПТИЦЫ У РЕКИ

Задача

У одного арабского математика XI века находим следующую задачу.



Рис. 2.

На обоих берегах реки растет по пальме, одна против другой. Высота одной – 30 локтей, другой – 20 локтей; расстояние между их основаниями – 50 локтей. На верхушке каждой пальмы сидит птица. Внезапно обе птицы заметили рыбу, выплывшую к поверхности воды между пальмами; они кинулись к ней разом

и достигли ее одновременно (рис. 2).

В каком расстоянии от основания более высокой пальмы появилась рыба?

Решение

Из схематического чертежа (рис. 3), пользуясь теоремой Пифагора, устанавливаем:

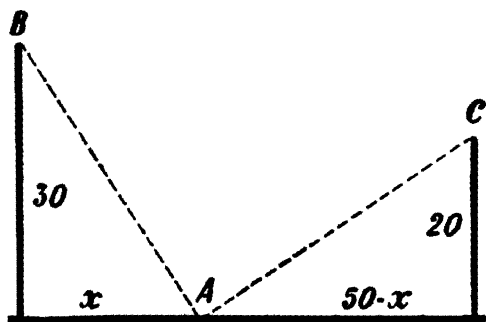


Рис. 3.

$$AB^2 = 30^2 + x^2; \quad AC^2 = 20^2 + (50 - x)^2.$$

Но $AB = AC$, так как обе птицы пролетели эти расстояния в одинаковое время. Поэтому

$$30^2 + x^2 = 20^2 + (50 - x)^2.$$

Раскрыв скобки и сделав упрощения, получаем уравнение первой степени

$$100x = 2000,$$

откуда

$$x = 20.$$

Рыба появилась в 20 локтях от той пальмы, высота которой 30 локтей.

ПРОДАЖА ЧАСОВ

Задача первая

Куплены двое часов за 220 руб. и затем проданы: одни с 10% прибыли, другие с 10% убытка. В общем итоге получено было 5% прибыли. Сколько заплачено порознь за часы при первоначальной покупке?

Решение

Обозначим искомую стоимость первых часов через x , тогда стоимость вторых выразится через $220 - x$.

Первые часы проданы были с прибылью в 0,1 их стоимости, т. е. за $x + 0,1x = 1,1x$; вторые проданы с убытком в 0,1 их стоимости, т. е. за $0,9(220 - x)$.

Сумма, вырученная от продажи обоих часов, на 5% больше их стоимости, т. е. составляла $220 + 0,05 \times 220 = 220 \times 1,05$. Имеем уравнение:

$$1,1x + 0,9(220 - x) = 220 \times 1,05,$$

отсюда $x = 165$; $220 - x = 55$.

Первые часы стоили 165 руб., вторые 55 руб.

Задача вторая

Двое часов проданы по одной цене. При продаже первых получено 20% убытка, при продаже вторых – 20% прибыли. В общем же продажа дала 5 рублей убытка. Определить себестоимость часов.

Решение

Здесь два неизвестных: себестоимость первых часов, которую мы обозначим через x , и себестоимость вторых – y . Продажная цена первых часов $x - 0,2x = 0,8x$, вторых $y + 0,2y = 1,2y$.

Имеем уравнение

$$0,8x = 1,2y, \text{ или } 2x = 3y.$$

Так как у нас два неизвестных, то одного уравнения недостаточно для их нахождения. Составим второе, выразив в нем ту часть условия, которая не вошла в первое уравнение, а именно, что продажа дала 5 рублей убытка:

$$(x + y) - (0,8x + 1,2y) = 5.$$

Преобразуем его:

$$x + y - 0,8x - 1,2y = 5$$

$$0,2x - 0,2y = 5$$

$$2x - 2y = 50.$$

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x = 3y \\ 2x - 2y = 50. \end{cases}$$

Подставив во второе уравнение вместо $2x$ равную им величину $3y$, получаем

$$y = 50.$$

Легко найти теперь, что $x = 75$ руб.

Себестоимость часов 75 руб. и 50 руб.

ПРОГУЛКА

Задача

Следующая задача изложена одним английским писателем в беллетристической форме:

– Зайдите ко мне завтра днем на чашку чая, – сказал старый доктор своему знакомому.

– Благодарю вас. Я выйду, в три часа. Может быть, и вы надумаете прогуляться, так выходите в то же время, встретимся на полпути.

Вы забываете, что я старик, шагаю в час всего только 3 км, а вы, молодой человек, проходите при самом медленном шаге 4 км в час. Не грешно бы дать мне небольшую льготу.

– Справедливо. Так как я прохожу больше вас на 1 км в час, то, чтобы уравнивать нас, дам вам этот километр, т. е. выйду на четверть часа раньше. Достаточно?

– Очень любезно с вашей стороны, – поспешил согласиться старик.

Молодой человек так и сделал: вышел из дому в три четверти третьего и шел со скоростью 4 км в час. А доктор вышел ровно в три и делал по 3 км в час. Когда они встретились, старик повернул обратно и направился домой вместе с молодым другом.

Только за чаем сообразил молодой человек, что с льготной четвертью часа вышло не совсем ладно. Он сказал доктору, что из-за этого ему придется в общем итоге пройти вдвое больше, чем доктору.

– Не вдвое, а вчетверо, – возразил доктор, и был прав.

Как далеко от дома доктора до дома его молодого знакомого?

Решение

Обозначим расстояние между домами через x . Молодой человек всего прошел $2x$, а доктор вчетверо меньше, т. е. $\frac{x}{2}$. До встречи доктор прошел половину пройденного им пути, т. е. $\frac{x}{4}$, а молодой человек – остальное, т. е. $\frac{x}{12}$. Свою часть пути доктор прошел в $\frac{3x}{4}$ часа, а молодой человек – в $\frac{3x}{16}$ часа, причем мы знаем, что он был в пути на $\frac{1}{4}$ часа дольше, чем доктор.

Имеем уравнение:

$$\frac{3x}{16} - \frac{x}{12} = \frac{1}{4},$$

откуда $x = 2,4$ км.

От дома молодого человека до дома доктора – 2,4 км.

ЗАДАЧА ЛЬВА ТОЛСТОГО

Известный физик А. В. Цангер в своих воспоминаний о Л. Н. Толстом рассказывает о следующей задаче, которой занимался Л. Н. Толстой:

«Артели косцов надо было скосить два луга, один вдвое больше другого. Половину дня артель косила большой луг. После этого артель разделилась пополам: первая половина осталась на большом лугу и докосила его к вечеру до конца; вторая же половина косила малый луг, на котором к вечеру еще остался участок, скошенный на другой, день одним косцом за один день работы.

Сколько косцов было в артели?»

Решение

В этом случае, кроме главного неизвестного – числа косцов, которое мы обозначим через x , – приходится ввести еще и вспомогательное, именно – размер участка, скашиваемого одним косцом в 1 день; обозначим его через y . Хотя задача и не требует его определения, оно облегчит нам нахождение главного неизвестного.

Выразим через x и y площадь большего луга. Луг этот косили полдня x косцов; они скосили $x \times \frac{1}{2} \times y = \frac{xy}{2}$.

Вторую половину дня его косила только половина артели, т. е. $\frac{x}{2}$ косцов; они скосили $\frac{x}{2} \times \frac{1}{2} \times y = \frac{xy}{4}$.

Так как к вечеру скошен был весь луг, то площадь его равна

$$\frac{xy}{2} + \frac{xy}{4} = \frac{3xy}{4}$$

Выразим теперь через x и y площадь меньшего луга.

Его полдня косили $\frac{x}{2}$ косцов и скосили площадь $\frac{x}{2} \times \frac{1}{2} \times y = \frac{xy}{4}$. Прибавим недокошенный участок, как раз равный y (площади, скашиваемой одним косцом в 1 рабочий день), и получим площадь меньшего луга:

$$\frac{xy}{4} + y = \frac{xy + 4y}{4}$$

Остается перевести на язык алгебры фразу: «первый луг вдвое больше второго», – и уравнение составлено:

$$\frac{3xy}{4} : \frac{xy + 4y}{4} = 2 \quad \text{или} \quad \frac{3xy}{xy + 4y} = 2$$

Сократим дробь в левой части уравнения на y , вспомогательное неизвестное благодаря этому исключается, и уравнение принимает вид

$$\frac{3x}{x+4} = 2 \quad \text{или} \quad 3x = 2x + 8,$$

откуда $x = 8$.

В артели было 8 косцов¹.

После напечатания первого издания «Занимательной алгебры» проф. А. В. Цингер прислал мне подробное и весьма интересное сообщение, касающееся этой задачи. Главный эффект задачи, по его мнению, в том, что «она совсем не алгебраическая, а арифметическая и притом крайне простая, затрудняющая только своей нешаблонной формой».

«История этой задачи такова, – продолжает проф. А. В. Цингер. – В Московском университете на математическом факультете в те времена, когда там учились мой отец и мой дядя И. И. Раевский (близкий друг Л. Толстого), среди прочих, предметов преподавалось нечто вроде педагогики. Для этой цели студенты должны были посещать отведенную для университета городскую народную школу и там в сотрудничестве с опытными искусными учителями упражняться в преподавании. Среди товарищей Цингера и Раевского был некий студент Петров, по рассказам – чрезвычайно одаренный и оригинальный человек. Этот Петров (умерший очень молодым, кажется, от чахотки) утверждал, что на уроках арифметики учеников портят, приучая их к ша-

¹ Возможны и другие варианты алгебраического решения, – например, три следующие:

$$1) \quad \frac{x+1}{3} = \frac{x}{4} + 1$$

$$2) \quad \frac{2(x+1)}{3} = \frac{x}{2} + \frac{x}{4}$$

$$3) \quad \left(\frac{x}{4} + 1 \right) : \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{4} \right) = 1 : 2$$

блонным задачам и к шаблонным способам решения. Для подтверждения своей мысли Петров изобретал задачи, которые вследствие нешаблонности очень затрудняли «опытных искусных учителей», но легко решались более способными учениками, еще не испорченными учебой. К числу таких задач (их Петров сочинил несколько) относится и задача об артели косцов. Опытные учителя, разумеется, легко могли решать ее при помощи уравнения, но простое арифметическое решение от них ускользало. Между тем, задача настолько проста, что привлекать для ее решения алгебраический аппарат совсем не стоит.

Если большой луг полдня косила вся артель и полдня пол-артели, то ясно, что в полдня пол-артели скашивает $\frac{1}{3}$ луга. Следовательно, на малом лугу остался $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Если один косец в день скашивает $\frac{1}{6}$ луга, а скошено было $\frac{6}{6} + \frac{2}{6} = \frac{8}{6}$, то косцов было 8.

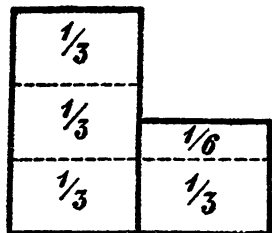


Рис. 4.

Толстой, всю жизнь любивший фокусные, не слишком хитрые задачи, эту задачу знал от моего отца еще с молодых лет. Когда об этой задаче пришлось беседовать мне с Толстым – уже стариком, его особенно восхитило то, что задача делается гораздо яснее и прозрачнее, если при решении пользоваться самым примитивным чертежом (рис. 4).

Мне несчетное число раз приходилось рассказывать об этой задаче самой разнообразной публике, начиная с профессоров-математиков и кончая деревенскими школярами. По моему мнению, всем без всякого исключения чертежик весьма облегчал решение. Сам я

еще в детстве, помню, понял решение задачи по объяснению отца, который намечал размеры лугов пальцем на шахматной доске в 6 и в 3 квадратики».

Нельзя не согласиться с автором письма, что название *задача Л. Толстого* «по существу неправильно, так же как в свое время было неправильным ее название *задача проф. А. В. Цингера*, под которым она была известна московским, петербургским и провинциальным математикам».

КОРОВЫ НА ЛУГУ

Задача

«При изучении наук задачи полезнее правил», – писал Ньютон в своей «Всеобщей арифметике» и сопровождал теоретические указания рядом примеров. В числе этих упражнений находим задачу о быках, пасущихся на лугу, – родоначальницу особого типа своеобразных задач, наподобие следующей:

Трава на всем лугу растет одинаково густо и быстро. Известно, что 70 коров поели бы ее в 24 дня, а 30 коров – в 60 дней. Сколько коров поели бы всю траву луга в 96 дней?»

Задача эта в одном английском журнале послужила сюжетом для юмористического рассказа, напоминающего Чеховский «Репетитор». Двое взрослых, родственники школьника, которому эту задачу задали для решения, безуспешно трудятся над нею и недоумевают:

« – Выходит что-то странное, – говорит один из решающих: – если в 24 дня 70 коров поедают всю траву луга, то сколько коров съедят ее в 96 дней? Конечно, $\frac{1}{4}$ от 70, т. е. $17\frac{1}{2}$ коров... Первая нелепость! А вот вторая: 30 коров поедают траву в 60 дней; сколько коров съедят ее в 96 дней? Получается еще хуже: $18\frac{3}{4}$ коровы.

Кроме того: если 70 коров поедают траву в 24 дня, то 30 коров употребляют на это 56 дней, а вовсе не 60, как утверждает задача.

« – А приняли вы в расчет, что трава все время растет?» – спрашивает другой.

Замечание резонное: трава непрерывно растет, и если этого не учитывать, то не только нельзя решить задачи, но и само условие ее будет казаться противоречивым.

Как же решается задача?

Решение

Введем и здесь вспомогательное неизвестное, которое будет обозначать суточный прирост травы в долях ее запаса на лугу. В одни сутки прирастает y , в 24 дня – $24y$; если общий запас выразить через 1, то в течение 24 дней коровы съедают

$$1 + 24y.$$

В сутки все стадо (из 70 коров) съедает

$$\frac{1 + 24y}{24}$$

а одна корова съедает в сутки

$$\frac{1 + 24y}{24 \times 70}$$

Подобным же образом из того, что 30 коров поели бы траву того же луга в 60 суток, выводим, что одна корова съедает в одни сутки

$$\frac{1 + 60y}{30 \times 60}$$

Но количество травы, съедаемое коровой в сутки, для обоих стад одинаково. Поэтому

$$\frac{1 + 24y}{24 \times 70} = \frac{1 + 60y}{30 \times 60}$$

откуда

$$y = \frac{1}{480}$$

Найдя y (величину прироста), легко уже определить, какую долю первоначального запаса травы съедает одна корова в сутки:

$$\frac{1 + 24y}{24 \times 70} = \frac{1 + 24 \times \frac{1}{480}}{24 \times 70} = \frac{1}{1600}.$$

Наконец, составляем уравнение для окончательного решения задачи: если искомое число коров x , то

$$\frac{1 + 96 \times \frac{1}{480}}{96x} = \frac{1}{1600}.$$

откуда $x = 20$.

20 коров поели бы всю траву в 96 дней.

ЗАДАЧА НЬЮТОНА

Рассмотрим теперь подлинную ньютонову задачу о быках, по образцу которой составлена сейчас рассмотренная.

Задача, впрочем, придумана не самим Ньютоном; она является продуктом народного математического творчества.

«Три луга, покрытые травой одинаковой густоты и скорости роста, имеют площади: $3\frac{1}{2}$ га, 10 га и 24 га. Первый прокормил 12 быков в продолжение 4 недель; второй – 21 быка в течение 9 недель. Сколько, быков может прокормить третий луг в течение 18 недель?»

Решение

Введем вспомогательное неизвестное y , означающее, какая доля первоначального запаса травы прирастает на 1 га в течение недели. На первом лугу в течение недели прирастает травы $3\frac{1}{3}y$, а в течение 4 недель

$3\frac{1}{3}y \times 4 = \frac{40}{3}y$ того запаса, который первоначально на нем имелся. Это равносильно тому, как если бы первоначальная площадь луга увеличилась и сделалась равной

$$3\frac{1}{3} + \frac{40}{3}y \text{ гектаров.}$$

Другими словами, быки съели столько травы, сколько покрывает луг площадью $3\frac{1}{3} + \frac{40}{3}y$ гектаров. В одну неделю 12 быков поели $\frac{1}{4}$ этого количества, а 1 бык в неделю – $\frac{1}{48}$, т. е. запас, растущий на площади

$$\left(3\frac{1}{3} + \frac{40}{3}y \right) : 48 = \frac{10 + 40y}{114} \text{ га.}$$

Подобным же образом находим площадь луга, кормящего одного быка в течение недели, из данных для второго луга:

недельный прирост на 1 га = y

9-недельн. прирост на 1 га = $9y$

9-недельн. прирост на 10 га = $90y$.

Площадь участка, содержащего запас травы для прокормления 21 быка в течение 9 недель, равна

$$10 + 90y.$$

Площадь, достаточная для прокормления 1 быка в течение 1 недели, –

$$\frac{10 + 90y}{9 \times 21} = \frac{10 + 90y}{189} \text{ га.}$$

Обе нормы прокормления должны быть одинаковы:

$$\frac{10 + 40y}{144} = \frac{10 + 90y}{189} \text{ га.}$$

Решив это уравнение, находим $y = \frac{1}{12}$.

Определим теперь площадь луга, наличный запас травы которой достаточен для прокормления одного быка в течение недели:

$$\frac{10 + 40y}{144} = \frac{10 + 40 \times \frac{1}{12}}{144} = \frac{5}{54} \text{ га.}$$

Наконец, приступаем к вопросу задачи. Обозначив искомое число быков через x , имеем

$$\frac{23 + 24 \times 18 \times \frac{1}{12}}{18x} = \frac{5}{54} \text{ га,}$$

откуда $x = 36$. Третий луг может прокормить в течение 18 недель 36 быков.

СЕМЕРО ИГРОКОВ

Задача

Семь игроков условились, что каждый проигравший платит каждому из остальных шести партнеров столько денег, сколько у того имеется, – другими словами, удваивает его деньги.

Сыграли 7 партий. Проиграли все – каждый по разу.

По окончании игры подсчитали, сколько у каждого денег. Оказалось у всех поровну – 12 руб. 80 коп.

Сколько у каждого было денег до начала игры?

Решение

Несмотря на кажущуюся сложность, задача решается довольно просто, если сообразить, что во время

игры, общая сумма денег у всех игроков оставалась неизменной: деньги только переходили из кармана одного в карман другого. Отсюда следует, что до начала игры общее количество денег было то же, что и к концу, т. е. равнялось $7 \times 12,8$ рублей.

Проследим за тем, как во время игры менялось количество денег игрока, проигравшего первым.

До начала игры у него было x рублей.

После первой партии он, проиграв, уплатил шестерым партнерам столько, сколько у всех их имелось, т. е. $7 \times 12,8 - x$. Осталось у него после первой партии $x - (7 \times 12,8 - x) = 2x - 7 \times 12,8$.

После второй партии деньги его удвоились и, значит, стали равны

$$2(2x - 7 \times 12,8).$$

После третьей партии деньги его снова удвоились и составляли

$$2^2 (2x - 7 \times 12,8).$$

После четвертой партии у него оказалось

$$2^3 (2x - 7 \times 12,8).$$

После 7-й партии, т. е. по окончании игры, у него было 12,8 р.; следовательно,

$$2^6 (2x - 7 \times 12,8) = 12,8.$$

Решаем это уравнение:

$$64 (2x - 7 \times 12,8) = 12,8$$

$$2x - 7 \times 12,8 = 0,2$$

$$2x - 89,6 = 0,2; x = 44,9.$$

Итак, до начала игры первый игрок имеет 44 р. 90 к.

Таким же образом определим и деньги игрока, проигравшего вторым. До начала игры у него было y . После первой партии у него стало $2y$.

Вторую партию он проиграл и выплатил $7 \times 12,8 - 2y$; осталось у него $2y - (7 \times 12,8 - 2y) = 4y - 7 \times 12,8$.

После третьей партии у него было

$$2(4y - 7 \times 12,8).$$

После четвертой:

$$2^2(4y - 7 \times 12,8)$$

После седьмой:

$$2^5(4y - 7 \times 12,8)$$

Имеем уравнение

$$2^5(4y - 7 \times 12,8) = 12,8$$

откуда $y = 22$ р. 50 к.

Подобным же образом находим деньги третьего игрока – 11 р. 30 к.

Предоставляем читателю самостоятельно определить деньги остальных игроков. Проверкой решения будет то, что сумма денег всех игроков до и после игры должна быть одна и та же.

ЧИСЛЕННОСТЬ ПЛЕМЕНИ

Задача

Племя в мужской своей части состоит из прадеда, 3 дедов, 12 внуков и некоторого числа правнуков. Отцов в 10 раз меньше, нежели сыновей. Какова общая численность мужчин в племени?

Решение

Задача окажется весьма простой, если сообразить, что человек может быть одновременно и отцом и сы-

ном. Имея это в виду, мы поймем, что число всех отцов в племени равно¹

$$1 + 3 + 12.$$

Число же всех сыновей (если правнуков x) выразится так:

$$3 + 12 + x.$$

Первых, мы знаем, в 10 раз меньше, чем вторых. Имеем уравнение:

$$10 (1 + 3 + 12) = 3 + 12 + x,$$

т. е.

$$160 = x - 15,$$

откуда $x = 145$. Общая численность мужчин в племени $145 + 12 + 3 + 1 = 161$.

МНИМАЯ НЕЛЕПОСТЬ

Задача

Вот задача, которая может показаться совершенно абсурдной:

Чему равно 84, когда $8 \times 8 = 54$?

Этот странный вопрос далеко не лишен смысла, и задача может быть решена помощью уравнений. Попробуйте расшифровать ее.

Решение

Вы догадались, вероятно, что числа, входящие в задачу, написаны не по десятичной системе, – иначе вопрос «чему равно 84» был бы нелеп. Пусть основание неизвестной системы счисления есть x . Число «84» означает тогда 8 единиц второго разряда и 4 единицы первого, т. е.

¹ Предполагая, что каждый внук имел сыновей.

$$\text{«84»} = 8x + 4.$$

Число «54» означает $5x + 4$.

Имеем уравнение:

$$8 \times 8 = 5x + 4,$$

т. е. в десятичной системе

$$64 = 5x + 4,$$

откуда $x = 12$. Числа написаны по двенадцатиричной системе, и «84» = $8 \times 12 + 4 = 100$.

Значит «84» = 100, когда $8 \times 8 = \text{«54»}$.

Подобным же образом решается и другая задача в этом роде:

Чему равно 100, когда $5 \times 6 = 33$?

Ответ: 81 (девятеричная система счисления).

УРАВНЕНИЕ ДУМАЕТ ЗА НАС

Если вы сомневаетесь в том, что уравнение бывает иной раз предусмотрительнее нас самих, решите следующую задачу:

Отцу 32 года, сыну 5 лет. Через сколько лет отец будет в 10 раз старше сына?

Обозначим искомый срок через x . Спустя x лет, отцу будет $32 + x$ лет, сыну $5 + x$. И так как отец должен тогда быть в 10 раз старше сына, то имеем уравнение:

$$(32 + x) = 10(5 + x).$$

Решив его, получаем $x = -2$.

«Через минус 2 года» означает: «два года назад». Когда мы составляли уравнение, мы не подумали о том, что возраст отца никогда в будущем не окажется в 10 раз превосходящим возраст сына, но что такое соотно-

шение могло быть только в прошлом. Уравнение оказалось вдумчивее нас и напомнило о сделанном упущении.

КУРЬЕЗЫ И НЕОЖИДАННОСТИ

При решении уравнений мы наталкиваемся иногда на ответы, которые могут поставить в тупик малоопытного математика. Приведем несколько примеров.

I. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + y = 12 \\ x = 5 - \frac{y}{3} \end{cases}$$

Подставив в первое уравнение значение x из второго, имеем:

$$3 \left(5 - \frac{y}{3} \right) + y = 12,$$

а после преобразований:

$$15 = 12.$$

У нас не определились значения ни x , ни y , зато мы узнали, что $15 = 12$... Что это значит?

Это означает лишь, что чисел, удовлетворяющих данным уравнениям, не существует и что уравнения эти противоречат одно другому. В самом деле: умножив второе уравнение на 3 и перенеся y в левую часть, получим

$$3x + y = 15.$$

Одна и та же величина $(3x + y)$ согласно первому уравнению равна 12, согласно же второму 15. Это возможно было бы лишь, если $12 = 15$, т. е. безусловно невозможно.

Подобное же недоразумение ожидает решающего следующую систему уравнений ¹

$$\begin{cases} x^2y^2 = 8 \\ xy = 4 \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе, получаем

$$xy = 2,$$

а сопоставляя сейчас полученное уравнение со вторым, видим, что

$$\begin{cases} xy = 4 \\ xy = 2 \end{cases}$$

т. е. $4 = 2$. Чисел, удовлетворяющих этой системе, не существует. (Уравнения, которые, подобно сейчас рассмотренным, не имеют общих решений, называются несовместными.)

II. С иного рода неожиданностями встречаемся мы, решая задачи, подобные следующей:

Разность цифр двузначного числа 3. Если к этому числу прибавить 27, то получится число, отличающееся от искомого только порядком цифр. Что это за число?

Составляем уравнение. Если цифру десятков обозначим через x , то число единиц выразится через $x + 3$. Переводя задачу на язык алгебры, получим:

¹ Незадолго до смерти знаменитый американский изобретатель Эдисон пожелал поощрить денежной помощью (стипендией) самого сметливого юношу США. По его приглашению с разных концов республики были направлены к нему наиболее одаренные школьники по одному от каждого штата, и великий изобретатель во главе целой комиссии (куда входили, между прочим, «автомобильный король» Форд и знаменитый летчик Линдберг) подверг их испытанию, чтобы выделить «лучшего из лучших». Каждый юноша должен был ответить на ряд вопросов самого разнообразного характера и решить ряд задач. Одну из них мы и приводим здесь.

$$10x + (x + 3) + 27 = 10(x + 3) + x.$$

Сделав упрощения, приходим к равенству:

$$0 = 0.$$

Это равенство неоспоримо верно, но оно ничего не говорит нам о значении x . Значит ли это, что чисел, удовлетворяющих требованию задачи, не существует?

Напротив, это означает, что составленное нами уравнение есть тождество, т. е. что оно верно при любом значении неизвестного x . Действительно, легко убедиться, что указанным в задаче свойством обладает каждое двузначное число с разностью цифр 3:

$$14 + 27 = 41$$

$$58 + 27 = 85$$

$$47 + 27 = 74$$

$$36 + 27 = 63$$

$$25 + 27 = 52$$

$$69 + 27 = 96$$

III. Найти трехзначное число, обладающее следующими свойствами:

- 1) цифра десятков 7;
- 2) цифра сотен на 4 меньше цифры единиц;
- 3) если цифры этого числа разместить в обратном порядке, то новое число будет на 396 больше искомого.

Составим уравнение, обозначив цифру сотен через x :

$$100x + 70 + x - 4 - [100(x - 4) + 70 + x] = 396.$$

Уравнение это после упрощений приводит к равенству

$$0 = 0.$$

Читатели уже знают, как надо толковать подобный результат. Он означает, что каждое трехзначное число, в котором первая цифра на 4 меньше третьей, увеличивается на 396, если цифры поставить в обратном порядке.

До сих пор мы рассматривали задачи, имеющие более или менее искусственный, книжный характер; их назначение – помочь приобрести навык в составлении и решении уравнений. Теперь вооруженные теоретически, займемся несколькими примерами задач практических – из области производства, обихода, военного дела, спорта.

В ПАРИКМАХЕРСКОЙ

Задача

Может ли алгебра понадобиться в парикмахерской? Оказывается, что такие случаи бывают. Мне пришлось убедиться в этом, когда однажды в парикмахерской подошел ко мне мастер с неожиданной просьбой:

– Не поможете ли нам разрешить задачу, с которой мы никак не справимся?

– Уж сколько раствора испортили из-за этого! – добавил другой.

– В чем задача? – осведомился я.

– У нас имеется два раствора перекиси водорода, 30-процентный и 3-х процентный. Нужно их смешать так, чтобы составил 12-процентный раствор. Не можем подыскать правильной пропорции...

Мне дали бумажку, и требуемая пропорция была отыскана.

Она оказалась очень простой. Какой именно?

Решение

Задачу можно решить и арифметически, но язык алгебры приводит здесь к цели проще и быстрее. Пусть для составления 12-процентной смеси требует-

ся взять x граммов 3-х процентного раствора и y граммов 30-процентного. В первой порции берется тогда $0,03x$ граммов чистой перекиси водорода, во второй $0,3y$, а всего

$$0,03x + 0,3y.$$

При этом получается $x + y$ граммов раствора, в котором чистой перекиси $0,12(x + y)$. Имеем уравнение

$$0,03x + 0,3y = 0,12(x + y).$$

Умножив все члены уравнения на 100 и раскрыв скобки, получаем

$$3x + 30y = 12x + 12y,$$

откуда

$$18y = 9x \text{ и } \frac{x}{y} = 2.$$

Значит, 3-х процентного раствора надо взять вдвое больше, чем 30-процентного.

Проверим. Возьмем два литра 3-х процентного раствора и 1 литр 30-процентного. Чистой перекиси мы будем тогда иметь

$$0,03 \times 2\,000 + 0,3 \times 1\,000 = 60 + 300 = 360 \text{ куб. см.}$$

В трех литрах (3 000 куб. см) смеси окажется 360 куб. см перекиси: процентное содержание ее составляет

$$\frac{360}{3000} \times 100 = 12\%,$$

как и требовалось.

Мы имеем здесь пример, когда посредством уравнения решается вопрос, относящийся не к «числам», а к «отвлеченным отношениям величин».

ТРАМВАЙ И ПЕШЕХОД

Задача

Идя вдоль трамвайного пути, я заметил, что каждые 12 минут меня нагоняет трамвайный вагон, а каждые



4 минуты я сам встречаю трамвайный вагон. И я, и трамвай движемся с равномерной скоростью.

Через сколько минут один после другого покидают трамвайные вагоны свои конечные пункты?

Решение

Если вагоны покидают свои конечные пункты каждые x минут, то это значит, что в то место, где я встретился с одним из вагонов, через x минут приходит следующий вагон. Если он догоняет меня, то в оставшиеся $12 - x$ минут он должен пройти тот путь, который я успеваю пройти в 12 минут. Значит тот путь, который я прохожу

в 1 минуту, трамвай проходит в $\frac{12 - x}{12}$ минут.

Если же трамвай идет мне навстречу, то он встретит меня через 4 минуты, а в оставшиеся $x - 4$ минуты он проходит тот путь, который я успел пройти в эти 4 минуты. Следовательно, тот путь, который я прохожу в 1

минуту, трамвай проходит в $\frac{x - 4}{4}$ минуты.

Получаем уравнение:

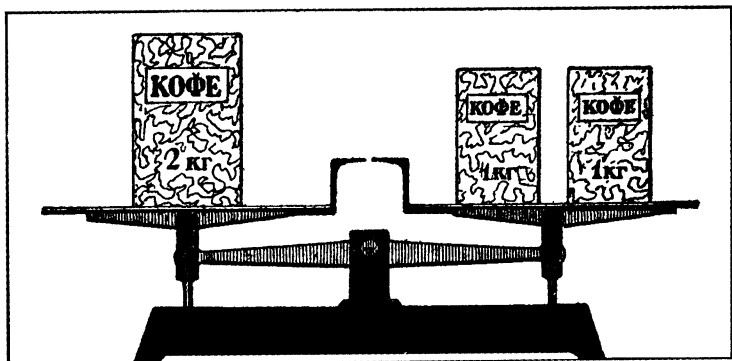
$$\frac{12 - x}{12} = \frac{x - 4}{4}$$

Отсюда $x = 6$. Вагоны отходят каждые 6 минут.

ДВЕ ЖЕСТЯНКИ КОФЕ

Задача

Две жестянки, наполненные кофе, имеют одинаковую форму и сделаны из одинаковой жести. Первая весит 2 килограмма и имеет в высоту 12 см; вторая весит 1 килограмм и имеет в высоту 9,5 см. Каков чистый вес кофе в жестянках?



Решение

Обозначим вес содержимого большей жестянки через x , меньшей – через y . Вес самих жестянок обозначим соответственно через z и t . Имеем уравнения:

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ y + t = 1 \end{cases}$$

Так как веса содержимого полных жестянок относятся, как их объемы, т. е. как кубы их высот¹, то

$$\frac{x}{y} = \frac{12^3}{9,5^3} = 2,02 \text{ или } x = 2,02 y.$$

¹ Пропорцией этой позволительно пользоваться лишь в том случае, когда стенки жестянок не слишком толсты (так как наружная и внутренняя поверхности жестянок, строго говоря, не подобны).

Веса же пустых жестянок относятся, как их полные поверхности, т. е. как квадраты их высот. Поэтому

$$\frac{z}{t} = \frac{12^2}{9,5^2} = 1,69 \text{ или } z = 1,69t.$$

Подставив значения x и z в первое уравнение, получаем систему

$$\begin{cases} 2,02 y + 1,69 t = 2 \\ y + t = 1 \end{cases}$$

Решив ее, узнаем:

$$y = \frac{31}{33} = 0,94 \text{ или } t = 0,06.$$

И следовательно,

$$x = 1,9; \quad z = 0,1.$$

Вес кофе без упаковки: в большей жестянке 1,9 килограмма, в меньшей – 0,94 килограмма.

НА ПУТИ К ЗАВОДУ

Задача

Двое рабочих, живущих вместе и работающих на одном заводе, вышли из дому на свой завод, один на 5 минут раньше другого. Тот, который вышел раньше, обычно проходит путь от дома до завода в 30 минут. Его более молодой сожитель проходит то же расстояние в 20 минут. Через сколько времени он догонит старшего товарища?

Решение

Рабочий, делающий весь путь в 30 минут, проходит ежеминутно $\frac{1}{30}$ пути; его товарищ $\frac{1}{20}$. Если встреча

произойдет через x минут после выхода второго, то первый в течение $5 + x$ минут пройдет долю

$$\frac{5 + x}{30} \text{ всего пути;}$$

второй –
$$\frac{x}{20} .$$

Так как оба пройдут от дома до места встречи один и тот же путь, то

$$\frac{5 + x}{30} = \frac{x}{20} .$$

откуда $x = 10$. Младший рабочий нагонит старшего через 10 минут после выхода из дому ¹.

ВЕЧЕРИНКА

Задача

На вечеринке было 42 танцующих. Мария танцевала с семью танцорами, Ольга – с восемью, Вера – с девятью и так далее до Нины, которая танцевала со всеми танцорами. Сколько танцоров (мужчин) было на вечеринке?

Решение

Задача решается очень просто, если удачно выбрать неизвестное. Будем искать число не танцоров, а танцорок, которое обозначим через x :

1-я, Мария,	танцевала с	$6 + 1$	танцорами
2-я, Ольга,	«	$6 + 2$	«
3-я, Вера,	«	$6 + 2$	«
x -я, Нина,	«	$6 + x$	«

¹ Задача имеет простое арифметическое решение

Имеем уравнение

$$x + (6 + x) = 42,$$

откуда

$$x = 18,$$

а следовательно число танцоров –

$$42 - 18 = 24.$$

МОРСКАЯ РАЗВЕДКА

Задача первая

Разведчику (разведывательному кораблю), имеющему скорость 28 миль в час, дано задание обследовать район моря по курсу эскадры, т. е. в направлении ее движения, в расстоянии 70 миль. Скорость эскадры 15 миль (в час). Требуется определить, через сколько времени разведчик возвратится к эскадре ¹.

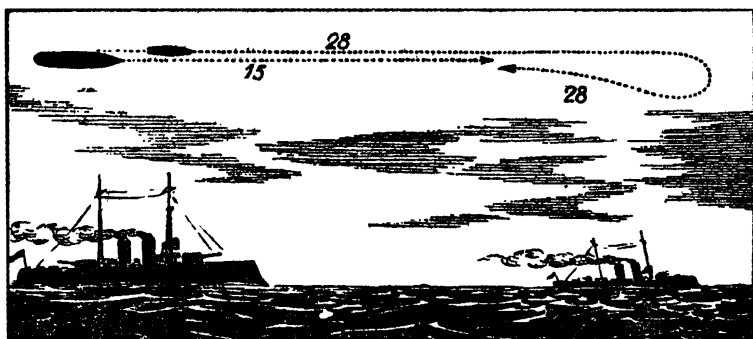


Рис. 5.

¹ «Из заметок по тактической навигации», К. А. Мигаловский, 1926 (пояснения в скобках мои) Я. П.

Решение

Обозначим искомое число часов через x . За это время эскадра успела пройти $15x$ миль, разведывательный же корабль $28x$. Последнее судно прошло вперед 70 миль и часть этого пути обратно; эскадра же прошла остальную часть того же пути. Вместе они прошли путь в $28x + 15x$, равный 2×70 . Имеем уравнение

$$28x + 15x = 140,$$

откуда

$$x = \frac{140}{43} = 3 \text{ ч. } 15 \text{ м.}$$

Разведчик возвратится к эскадре через 3 часа 15 минут.

Задача вторая

Разведывательное судно получило приказ произвести разведку впереди эскадры по направлению ее движения. Через 3 часа судно это должно вернуться к эскадре. Спустя сколько времени после оставления эскадры разведывательное судно должно повернуть назад, если скорость его 25 узлов, а эскадры 15 узлов?

Решение

Пусть разведчик должен повернуть спустя x часов; значит, он удалялся от эскадры x часов, а шел навстречу ей $(3 - x)$ часов. Пока все корабли шли в одном направлении, разведчик успел за x часов удалиться от эскадры на разность пройденных ими путей, т. е. на

$$25x - 15x = 10x.$$

При возвращении разведчика он прошел путь навстречу эскадре $25(3 - x)$, сама же эскадра прошла $15(3 - x)$. Тот и другой прошли вместе $10x$. Следовательно,

$$25(3 - x) + 15(3 - x) = 10x,$$

откуда

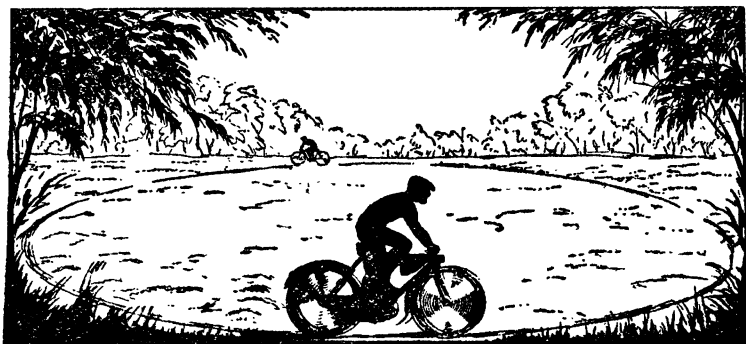
$$x = 2\frac{2}{5}.$$

Разведчик должен изменить курс на обратный спуск 2 ч. 24 м. после того, как он покинул эскадру.

НА ВЕЛОДРОМЕ

Задача

По круговой дорожке велодрома едут два велосипедиста с неизменными скоростями. Когда они едут в противоположных направлениях, то встречаются каждые 10 секунд; едучи же в одном направлении, они настигают друг друга каждые 170 секунд. Какова скорость каждого велосипедиста, если длина круговой дорожки 170 м?



Решение

Если скорость первого велосипедиста x , то в 10 секунд он проезжает $10x$ метров. Второй же, двигаясь ему навстречу, проезжает от встречи до встречи остальную часть круга, т. е. $170 - 10x$ метров. Если скорость второго y , то это составляет $10y$ метров:

$$170 - 10x = 10y.$$

Если же велосипедисты едут навстречу друг другу, то в 170 секунд первый проезжает $170x$ метров, а второй $170y$ метров. Если первый едет быстрее второго, то от одной встречи до другой он проезжает на один круг больше второго, т. е.

$$170x - 170y = 170.$$

После упрощения этих уравнений получаем:

$$x + y = 17; \quad x - y = 1,$$

откуда

$$x = 9 \text{ м в секунду}; \quad y = 8 \text{ м в секунду}.$$

ЭСКАЛАТОР МЕТРО

Задача

На одной из станций московского метро человек пробежал по ступеням поднимающегося эскалатора до высоты 10 м и обратно, употребив на пробег в оба конца 73 секунды. В другой раз он проделал то же самое на спускающемся эскалаторе и употребил на это 4 мин. 22 сек.

Найти скорость подъема эскалатора, зная, что человек сбегал вниз по его ступеням на 35% быстрее, нежели взбегал вверх.

Решение

Обозначив скорость подъема эскалатора через x , а скорость взбегающего человека по ступеням через y , составляем систему уравнений:

$$\frac{10}{x + y} + \frac{10}{1,35 - x} = 73$$

$$\frac{10}{y-x} + \frac{10}{1,35y+x} = 262$$

После преобразований получаем

$$\frac{23,5}{73} y = 1,35 y^2 + 0,35 xy - x^2;$$

$$\frac{23,5}{262} y = 1,35 y^2 - 0,35 xy - x^2;$$

Вычтя второе уравнение из первого, имеем

$$23,5 y \left(\frac{1}{73} - \frac{1}{262} \right) = 0,7 xy$$

или (так как y не равно нулю)

$$x = \frac{23,5}{0,7} \left(\frac{1}{73} - \frac{1}{262} \right) = 0,33.$$

Скорость подъема эскалатора равна 0,33 м в сек.

СОСТЯЗАНИЕ АВТОМОБИЛЕЙ

Задача

При автомобильных состязаниях одна из трех стартовавших одновременно машин, делавшая в час на 15 км меньше первой и на 3 км больше третьей, пришла к конечному пункту на 12 минут позже первой и на 3 минуты раньше третьей. Остановок в пути не было,

Требуется определить:

- а) Как велик участок пути?
- б) Как велика скорость каждой машины?
- в) Какова продолжительность пробега каждой машины?

Решение

Хотя требуется определить 7 неизвестных величин, мы обойдемся при решении задачи только двумя: со-

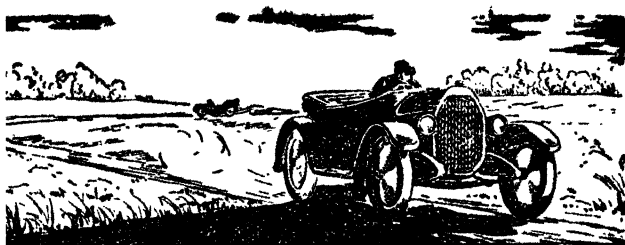


Рис. 6.

ставим систему двух уравнений с двумя неизвестными.

Обозначим скорость второй машины через x . Тогда скорость первой выразится через $x + 15$, а третьей — через $x - 3$.

Длину участка обозначим буквой y . Тогда продолжительность пробега обозначится:

для первой машины через $\dots \frac{y}{x + 15}$

для второй « « $\dots \frac{y}{x}$

для третьей « « $\dots \frac{y}{x - 3}$

Мы знаем, что вторая машина была в пути на 12 минут (т. е. на $\frac{1}{5}$ часа) дольше первой. Поэтому

$$\frac{y}{x} - \frac{y}{x + 15} = \frac{1}{5}.$$

Третья машина была в пути на 3 минуты (т. е. на $\frac{1}{20}$ часа) больше второй. Следовательно,

$$\frac{y}{x - 3} - \frac{y}{x} = \frac{1}{20}.$$

Первое уравнение преобразуем:

$$5y(x + 15) - 5xy = x(x + 15)$$

$$5xy + 75y - 5xy = x(x + 15)$$

$$75y = x(x + 15).$$

Второе уравнение также преобразуем:

$$20xy - 20y(x - 3) = x(x - 3)$$

$$20xy - 20xy + 60y = x(x - 3)$$

$$60y = x(x - 3).$$

Имеем систему

$$\begin{cases} 75y = x(x + 15) \\ 60y = x(x - 3). \end{cases}$$

Первое уравнение делим на второе, сокращая при этом на x и y (обе величины, мы знаем, не равны нулю). Получаем уравнение:

$$\frac{5}{4} = \frac{x + 15}{x - 3}.$$

или

$$5x - 15 = 4x + 60,$$

откуда

$$x = 75.$$

Зная x , находим y из уравнения

$$60y = x(x - 3) = 75 \times 72, \quad y = 90.$$

Итак, скорости машин определены:

$$90 \text{ км}, 75 \text{ км}, 72 \text{ км}.$$

Длина всего пути = 90 км.

Продолжительность пробегов:

$$\text{первой машины} \quad \frac{90}{90} = 1 \text{ час.}$$

$$\text{второй машины} \quad \frac{90}{75} = 1 \text{ ч. } 12 \text{ м.}$$

$$\text{третьей} \quad \ll \quad \frac{90}{72} = 1 \ll 15 \ll.$$

Таким образом все 7 неизвестных величин задачи определены.

СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ ЕЗДЫ

Задача

Автомобиль проехал расстояние между двумя городами со скоростью 30 км в час и возвратился со скоростью 20 км в час. Какова была средняя скорость его езды?

Решение

Обманчивая простота задачи вводит многих в заблуждение. Не вникнув в условия вопроса, вычисляют среднеарифметическое между 30 и 20, т. е. находят полусумму

$$30 + 20 = 25.$$

Это «простое» решение было бы правильно, если бы поездка в одну сторону и в обратном направлении длилась одинаковое время. Но ясно, что обратная поездка должна была отнять больше времени, чем езда туда, во столько раз, во сколько скорость езды туда (30 км в час) превышает скорость возвращения (20 км в час), т. е. в $\frac{3}{2}$ раза. Значит, со скоростью 30 км в час автомобиль двигался $\frac{2}{3}$ того промежутка времени, в течение которого он ехал со скоростью 20 км в час. Учтя это, мы поймем, что ответ 25 – неверен.

И действительно, уравнение дает другой ответ. Составить уравнение нетрудно, если ввести вспомогательное неизвестное – именно величину l расстояния между городами. Обозначив искомую среднюю скорость через x , составляем уравнение

$$\frac{2l}{x} = \frac{l}{30} + \frac{l}{20}.$$

Так как l не равно нулю, можем уравнение разделить на l ; получаем:

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{30} + \frac{1}{20}.$$

После преобразований имеем:

$$1200 = 20x + 30x,$$

откуда $x = 24$.

Итак, правильный ответ не 25 км в час, а 24.

МАШИНЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Беседа об уравнениях в плане «Занимательной алгебры» не может пройти мимо машин, решающих уравнения (притом весьма трудные) автоматическим путем. Это не утопия, как «литературная» или «мыслительная» машины, рассмотренные в первой главе, и не миф, существующий лишь в умах легковых людей, как мнимые шахматные автоматы. Машины для решения уравнений существуют на самом деле и автоматически находят корни таких трудных уравнений, как

$$x^9 + ax^8 + b = 0$$

$$x^9 + ax^7 + b = 0$$

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + c = 0$$

Наш академик А. Н. Крылов изобрел математическую машину, еще более удивительную: она справляется с уравнениями высшей математики (интегрирует дифференциальные уравнения).

Чтобы понять идею устройства подобных машин, вспомним, как решаются графически хотя бы урав-

¹ В 1904 г. российский ученый академик А. Н. Крылов изобрел первую механическую вычислительную машину, решающую дифференциальные уравнения (применялась при проектировании кораблей) (прим. ред.).

нения первой степени. Возьмем для примера уравнение.

$$2x - 8 = 0.$$

Мы можем заменить его такой несложной «системой»

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ y = 8 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = 2x \\ y = 8. \end{cases}$$

Уравнения $y = 2x$ и $y = 8$ можно рассматривать как уравнения двух прямых линий; абсцисса точки их пересечения и будет искомое x (рис. 7). Легко представить себе, механический прибор, осуществляющий этот метод

решения уравнений первой степени. Корни уравнения второй степени могут быть разысканы механическим прибором, осуществляющим пересечение параболы и прямой линии. Практически скорее и проще в этих случаях, конечно, находить корни вычислением, и потому подобные приборы могли бы иметь разве лишь дидактическое значение. Иное дело уравнения более высоких степеней, вычисление корней которых представляет долгую и утомительную работу; здесь создание механического прибора вполне оправдывается практической потребностью.

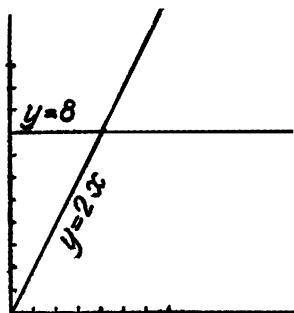


Рис. 7.

Иное дело уравнения более высоких степеней, вычисление корней которых представляет долгую и утомительную работу; здесь создание механического прибора вполне оправдывается практической потребностью.

На рис. 8 изображена машина для решения четырехчленных уравнений вида:

$$x^p + ax^m + bx^n + c = 0$$

3-й, 4-й и 5-й степеней. Объяснять подробности устройства этой машины было бы в нашей книге неуместно; укажу только, что корень отыскивается в ней

путем пересечения пространственной кривой с плоскостью. Никаких зубчаток, никаких сложных передач в этой «машине» нет, так что лучше, пожалуй, называть ее не машиной, а прибором или аппаратом. В ней три отвесных масштабных стойки, по одной из которых скользит диоптр (просверленная пластинка, рис. 8). Пространственная кривая (шкала x) нанесена на особом цилиндре. На делениях стоек отмечают коэффициенты a , b , c , причем две из этих пометок соединяются ниткой, а через диоптр третьей стойки замечают пометки тех точек кривой, которые отвечают местам ее пересечения с ниткой. Прибор этот изобретен проф. Мемке в Штуттгарте.

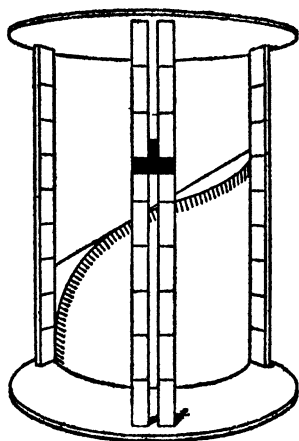
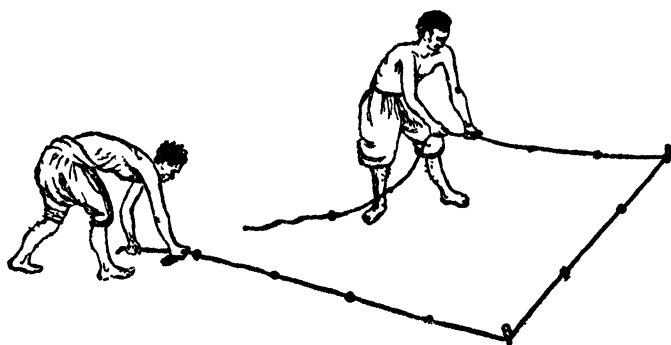


Рис. 8.



Глава третья

В ПОМОЩЬ АРИФМЕТИКЕ И ГЕОМЕТРИИ

Арифметика зачастую не в силах собственными средствами строго доказать правильность иных из ее утверждений. Ей приходится в таких случаях прибегать к обобщающим приемам алгебры. К подобным арифметическим положениям, обосновываемым алгебраически, принадлежат, например, многие правила сокращенного выполнения действий, любопытные особенности некоторых чисел, признаки делимости и др. Рассмотрению вопросов этого рода и посвящается настоящая глава.

МГНОВЕННОЕ УМНОЖЕНИЕ

Замечательный счетчик-виртуоз д-р Фред Брауне, затмивший славу своих предшественников и побивший все их рекорды, во многих случаях облегчает себе вычислительную работу, прибегая к несложным алгебраическим преобразованиям.

Например, он выполняет так:

$$\begin{aligned} 988 \times 988 &= (988 + 12) \times (988 - 12) + 12^2 = \\ &= 1\,000 \times 976 + 144 = 976\,144. \end{aligned}$$

Легко сообразить, что счетчик в этом случае пользуется следующим алгебраическим преобразованием:

$$(a + b)(a - b) + b^2 = a^2 - b^2 + b^2 = a^2.$$

Далее, умножение 986×997 выполняется Браунсом так:

$$986 \times 997 = (986 - 3) \times 1\,000 + 3 \times 14 = 983\,042.$$

На чем основан этот прием? Представим множители в виде:

$$(1000 - 14) \times (1000 - 3)$$

и перемножим эти двучлены по правилам алгебры:

$$1000 \times 1000 - 1000 \times 14 - 1000 \times 3 + 14 \times 3.$$

Делаем преобразования:

$$\begin{aligned} 1000(1000 - 14) - 1000 \times 3 + 14 \times 3 &= \\ = 1000 \times 986 - 1\,000 \times 3 + 14 \times 3 &= \\ = 1000(986 - 3) + 14 \times 3. \end{aligned}$$

Последняя строка и изображает прием немецкого счетчика.

Интересен применяемый им способ перемножения двух трехзначных чисел, у которых число десятков одинаково, а цифры единиц составляют в сумме 10. Например, умножение

$$783 \times 787$$

д-р Браунс выполняет так:

$$78 \times 79 = 6\,162; \quad 3 \times 7 = 21.$$

Результат 616 221.

Обоснование способа ясно из следующих преобразований:

$$\begin{aligned}(780 + 3) (780 + 7) &= \\&= 780 \times 780 + 780 \times 3 + 780 \times 7 + 3 \times 7 = \\&= 780 \times 780 + 780 \times 10 + 3 \times 7 = \\&= 780 (780 + 10) + 3 \times 7 = 780 \times 790 + 21 = \\&= 616\,200 + 21.\end{aligned}$$

Другой прием для выполнения подобных умножений также практикуемый немецким виртуозом, проще:

$$\begin{aligned}783 \times 787 &= (785 - 2) (785 + 2) = 785^2 - 4 = \\&= 616\,225 - 4 = 616\,221.\end{aligned}$$

На практике мы можем с успехом пользоваться для устных выкладок формулой:

$$a^2 = (a + b)(a - b) + b^2.$$

Например:

$$\begin{aligned}27^2 &= (27 + 3) (27 - 3) + 3^2 = 729 \\63^2 &= 66 \times 60 + 3^2 = 3\,969 \\18^2 &= 20 \times 16 + 2^2 = 324 \\37^2 &= 40 \times 34 + 7^2 = 1\,369 \\48^2 &= 50 \times 46 + 2^2 = 2\,304 \\54^2 &= 58 \times 50 + 4^2 = 2\,916.\end{aligned}$$

Очень удобен также следующий способ быстрого возвышения в квадрат чисел, оканчивающихся на 5.

$$\begin{aligned}35^2; \quad 3 \times 4 &= 12; \quad \text{Отв. } 1\,225. \\65^2; \quad 6 \times 7 &= 42; \quad \text{Отв. } 4\,225. \\75^2; \quad 7 \times 8 &= 56; \quad \text{Отв. } 5\,625.\end{aligned}$$

Правило состоит в том, что умножают число десятков на ближайшее высшее число, и к произведению приписывают 25.

Прием основан на следующем. Если число десятков a , то все число можно изобразить так

$$10a + 5.$$

Квадрат этого числа, как квадрат двучлена, равен $100a^2 + 100a + 25 = 100a(a + 1) + 25$.

Выражение $a(a + 1)$ есть произведение числа десятков на ближайшее высшее число. Умножить число на 100 и прибавить 25 все равно, что приписать к числу 25.

Прием этот годен лишь для чисел, оканчивающихся на 5. Но так как большинство людей склонно округлять конец числа до 5, то надобность в возвышении в квадрат подобных чисел возникает чаще, чем для прочих.

Из того же приема вытекает простой способ возвышать в квадрат числа, состоящие из целого и $\frac{1}{2}$. Например:

$$\left(3 \frac{1}{2}\right)^2 = 3,5^2 = 12,25 = 12\frac{1}{4}$$

$$\left(7 \frac{1}{2}\right)^2 = 56\frac{1}{4}$$

$$\left(8 \frac{1}{2}\right)^2 = 72\frac{1}{4} \quad \text{и т. п.}$$

ЦИФРЫ 1, 5 и 6

Вероятно, все заметили, что от перемножения ряда чисел, оканчивающихся единицей или пятеркой, получается число, оканчивающееся той же цифрой. Менее известно, что сказанное относится и к числу 6. Поэтому, между прочим, всякая степень числа, оканчивающегося на 6, также оканчивается шестеркой.

Например:

$$46^2 = 2\,116; \quad 46^3 = 97\,336.$$

Обосновать эту любопытную особенность цифр 1, 5 и 6 можно только алгебраическим путем. Рассмотрим ее для 6.

Числа, оканчивающиеся 6-ю, изображаются так:

$$10a + 6, 10b + 6 \text{ и т. д.,}$$

где a и b могут быть любые целые числа.

Произведение двух таких чисел равно

$$\begin{aligned} 100ab + 60b + 60a + 36 &= \\ = 10(10ab + 6b + 6a) + 30 + 6 &= \\ = 10(10ab + 6b + 6a + 3) + 6. \end{aligned}$$

Как видим, произведение составляется из некоторого числа десятков и из цифры 6, которая, разумеется, должна оказаться на конце.

Тот же прием доказательства можно приложить к 1 и к 5.

Сказанное дает нам право утверждать, что, например,

$$\begin{array}{lll} 336^{2567} & \text{оканчивается на } 6, \\ 815^{723} & \ll & \ll 5 \\ 491^{1732} & \ll & \ll 1 \text{ и т. п.,} \end{array}$$

ЧИСЛА 25 и 76

Есть и двузначные числа, обладающие тем же свойством, как и числа 1, 5 и 6. Это 25 и – что, вероятно, для многих будет неожиданностью, – число 76. Всякие два числа, оканчивающиеся на 76, дают в произведении число, оканчивающееся на 76.

Докажем это. Общее выражение для подобных чисел

$$100a + 76; 100b + 76 \text{ и т. д.}$$

Перемножим два таких числа; получим

$$10\,000ab + 7\,600b + 7\,600a + 5\,776 = 10\,000ab +$$

$$+ 7\,600b + 7\,600a + 5\,700 + 76 = \\ = 100(100ab + 76b + 76a + 57) + 76.$$

Положение доказано: произведение будет оканчиваться числом 76.

Отсюда следует, что всякая степень числа, оканчивающегося на 76, есть подобное же число:

$$376^2 = 141376; \quad 576^3 = 191\,102\,976 \text{ и т. п.}$$

Существуют и более длинные группы цифр, которые, находясь на конце чисел, сохраняются и в их произведении. Примером могут служить числа:

$$376; \, 625; \, 90\,625.$$

Например,

$$90\,625^2 = 8\,212\,890\,625.$$

Предоставляем читателю доказать это положение самостоятельно.

ДОПЛАТА

Старинная народная задача

Однажды в старые времена произошел такой случай. Двое прасолов¹ продали принадлежавший им гурт волов, получив при этом за каждого вола столько рублей, сколько в гурте было волов. На вырученные деньги купили стадо овец по 10 рублей за овцу и одного ягненка. При дележе поровну одному досталась лишняя овца, другой же взял ягненка и получил с компаньона соответствующую доплату. Как велика была доплата?

¹ Прасол – скупщик скота, птицы, рыбы для дальнейшей перепродажи (прим. ред.).

Решение

Задача не поддается прямому переводу «на алгебраический язык», для нее нельзя составить уравнения. Приходится решать ее особым путем, так сказать, по свободному математическому соображению. Но и здесь алгебра оказывает арифметике существенную помощь.

Стоимость всего стада в рублях есть точный квадрат, так как стадо приобретено на деньги от продажи n волов по n рублей за вола. Одному из компаньонов досталась лишняя овца, следовательно, число овец нечетное; нечетным, значит, является и число десятков в числе n^2 . Какова же цифра единиц?

Можно доказать, что если в точном квадрате число десятков нечетное, то цифра единиц в нем может быть только 6.

Квадрат всякого числа из a десятков и b единиц, т. е. $(10a + b)^2$, равен

$$100a^2 + 20ab + b^2 = (10a^2 + 2ab) \times 10 + b^2.$$

Десятков в этом числе $10a^2 + 2ab$ да еще некоторое число десятков, заключающихся в b^2 . Но $10a^2 + 2ab$ делится на 2, это число четное. Оно сделается нечетным, если в числе b^2 окажется нечетное число десятков. Вспомним, что такое b^2 . Это квадрат цифры единиц, т. е. одно из следующих 10 чисел:

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.$$

Среди них нечетное число десятков имеют только 16 и 36 – оба оканчивающиеся на 6. Значит, точный квадрат

$$100a^2 + 20ab + b^2$$

может иметь нечетное число десятков только в том случае, если оканчивается на 6.

Теперь легко найти ответ на вопрос задачи. Ясно, что ягненок пошел за 6 рублей, Компаньон, которому он достался, получил, следовательно, на 4 рубля меньше другого. Чтобы уравнивать доли, обладатель ягненка должен дополнить от своего компаньона 2 рубля.

Доплата равна 2 рублям.

ДЕЛИМОСТЬ НА 11

Алгебра весьма облегчает отыскание признаков, по которым можно заранее, не выполняя деления, установить, делится ли данное число на тот или иной делитель. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 – общеизвестны. Выведем признак делимости на 11; он довольно прост и практичен.

Каждое многозначное число N может быть в общем виде представлено так:

$$N = 10^n a + 10^{n-1} b + 10^{n-2} c + \dots + 10^3 p + 10^2 u + 10 v + w.$$

Посмотрим, какие остатки получаются от деления отдельных слагаемых этого числа. Начнем с конца:

w – число, меньшее 11, дает в остатке, конечно, само себя, т. е. w .

$10 v = 11 v - v$. Мы можем сказать, что при делении на 11 это слагаемое дает отрицательный остаток $-v$:

$$10^2 u = 100u = 99u + u; \text{ остаток } u.$$

$10^3 p = 1000p = 1001p - p$. Так как 1001 делится на 11, то остаток равен $-p$.

Легко видеть, что остаток от деления N на 11 должен равняться алгебраической сумме всех этих остатков, т. е.

$$\begin{aligned} a - b + c - d + e - \dots - p + u - v + w = \\ = (a + c + e + \dots + u + w) - (b + d + \dots + p + v). \end{aligned}$$

Иными словами: надо из суммы всех цифр, стоящих на нечетных местах, вычесть сумму всех цифр, занимающих четные места; если в разности получится 0 либо число (положительное или отрицательное), кратное 11, то и испытываемое число кратно 11.

Испытаем, например, число 87 635 064

$$8 + 6 + 5 + 6 = 25$$

$$7 + 3 + 0 + 4 = 14$$

$$25 - 14 = 11.$$

Значит, данное число делится на 11. Существует и другой признак делимости, удобный для не очень длинных чисел. Он состоит в том, что испытываемое число разбивают справа налево на грани по две цифры в каждой и складывают эти грани. Если полученная сумма делится без остатка на 11, то и испытываемое число кратно 11. Например, пусть требуется испытать число 528. Разбиваем число на грани (5/28) и складываем обе грани

$$5 + 28 = 33.$$

Так как 33 делится без остатка на 11, то и число 528 кратно 11:

$$528 : 11 = 48.$$

Докажем этот признак делимости, например, для любого пятизначного и шестизначного числа.

Такие числа можно представить в виде

$$N = 10\,000x + 100y + z,$$

где x – число десятков тысяч в нашем числе, y – число сотен, z – число единиц (т. е. x , y , z – грани нашего числа, расчлененного, как было указано). Делаем следующие преобразования:

$$N = 9\,999x + x + 99y + y + z$$

$$N = (9\,999x + 99y) + (x + y + z).$$

Так как $9\,999x + 99y$ кратно 11, то для делимости на 11 числа N необходимо и достаточно, чтобы $x + y + z$ (т. е. сумма граней) была кратна 11¹.

ДЕЛИМОСТЬ НА 19

Найти основание следующего признака делимости:

Число делится без остатка на 19, если половина числа его десятков, сложенная с цифрой единиц, кратна 19.

При нечетном числе десятков остаток от их деления на 2 (т. е. 10) прибавляется к единицам.

Решение

Всякое число N , можно представить в виде

$$N_1 = 10x + y,$$

где x – число десятков (не цифра в разряде десятков, а общее число целых десятков во всем числе), y – цифра единиц. Докажем сначала, что если при x четном (т. е. $x = 2z$) число

$$N_2 = \frac{x}{2} + y = z + y$$

кратно 19, то и $20z + y$ (т. е. N_1) кратно 19. Для этого составим разность $N_1 - N_2 = R$.

$$R = 20z + y - z - y = 19z,$$

откуда

$$N_1 = N_2 + R = 19z + N_2.$$

Ясно, что если N_2 кратно 19, то и кратно тому же числу. Это мы и хотели доказать.

¹ Не желая присваивать себе чужих заслуг, должен отметить, что изложенный признак делимости придуман моим сыном–школьником.

Рассмотрим теперь случай, когда число десятков x нечетное, т. е. равно $2z + 1$. Докажем, что число делится без остатка на 19, если число

$$N_3 = \frac{2z}{2} + 10 + y = z + y + 10$$

кратно 19. Составим разность:

$$N_1 - N_3 = 10(2z + 1) + y - z - y - 10 = R$$

$$R = 20z + 10 + y - z - y - 10 = 19z$$

Опять имеем

$$N_1 = 19z + N_3$$

равенство, подтверждающее правильность указанного признака делимости.

Покажем на примере, как им пользуются. Пусть требуется определить, делится ли на 19 число

47 045 881.

Применяем последовательно наш признак делимости:

$$\frac{4\ 704\ 588}{2} + 1 = 2\ 352\ 295$$

$$\frac{235\ 228}{2} + 15 = 117\ 629$$

$$\frac{11\ 762}{2} + 9 = 5\ 890$$

$$\frac{588}{2} + 10 = 304$$

$$\frac{30}{2} + 4 = 19$$

Так как 19 делится на 19 без остатка, то кратны 19 и числа

304, 5 890, 117629, 2352295, 47045881.

Итак, число наше делится на 19.

Нельзя сказать, чтобы этот признак делимости был практичен. Пожалуй, немногим больше времени отняло бы непосредственное испытание данного числа делением его на 19. Однако, лучшего признака делимости на 19 не найдено.

ПИФАГОРОВЫ ЧИСЛА

Задача

Удобный и очень точный способ, употребляемый землемерами для проведения на местности перпендикулярных линий, состоит в следующем. Пусть через точку A требуется к линии MN провести другую линию под прямым углом (рис. 9). Откладывают от A по

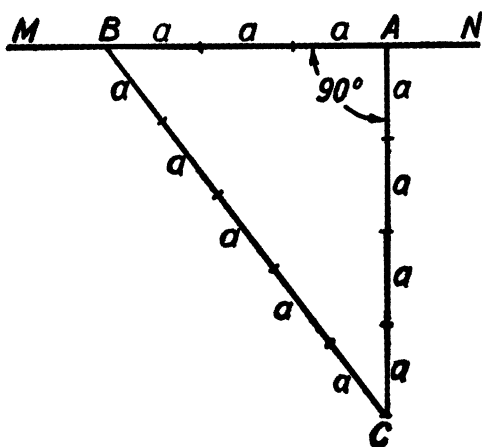


Рис. 9.

направлению AM три раза какое-нибудь расстояние a . Затем завязывают на шнуре три узла, расстояния между которыми равны $4a$ и $5a$. Приложив крайние узлы к точкам A и B , натягивают шнур за средний узел. Шнур

расположится треугольником, в котором угол A прямой.

Этот древний способ, применявшийся еще тысячелетия назад строителями египетских пирамид, основан на том, что каждый треугольник, стороны которого относятся как $3 : 4 : 5$, – прямоугольный, согласно общеизвестной теореме Пифагора:

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Вместо чисел 3, 4, 5 можно выбрать и другие «пифагоровы числа», которых существует бесчисленное множество. Например:

$5^2 + 12^2 = 13^2;$	$15^2 + 112^2 = 113^2;$
$7^2 + 24^2 = 25^2;$	$17^2 + 144^2 = 145^2;$
$8^2 + 15^2 = 17^2;$	$20^2 + 21^2 = 29^2;$
$9^2 + 40^2 = 41^2;$	$24^2 + 143^2 = 145^2;$
$11^2 + 60^2 = 61^2;$	$57^2 + 176^2 = 185^2;$
$13^2 + 84^2 = 85^2;$	$120^2 + 209^2 = 241^2;$

и т. д.

Рассматривая эти группы, убеждаемся, что в каждой из них есть четное число («четный катет»). Случайность ли это? Или все три пифагоровы числа не могут быть нечетными?

Решение

Станем рассуждать «от противного».

Допустим, что все три пифагоровы числа нечетные;

$$2x + 1; \quad 2y + 1; \quad 2z + 1.$$

Квадраты их:

$$(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$(2y + 1)^2 = 4y^2 + 4y + 1$$

$$(2z + 1)^2 = 4z^2 + 4z + 1.$$

Сумма первых двух из этих чисел, например $(2x + 1)^2 + (2y + 1)^2$, составляет

$$4x^2 + 4x + 1 + 4y^2 + 4y + 1 = 4x^2 + 4y^2 + 4x + 4y + 2,$$

т. е. число четное (кратное 2) и, очевидно, не может равняться нечетному числу $4z^2 + 4z + 1$. Поэтому группы из нечетных пифагоровых чисел не существуют.

Остается еще одна возможность: оба «катета» нечетные, а гипотенуза – «четная». Нетрудно доказать, что такая комбинация не существует. В самом деле: если «катеты» имеют вид

$$2x + 1 \text{ и } 2y + 1,$$

то сумма их квадратов равна

$$4x^2 + 4x + 1 + 4y^2 + 4y + 1 = 4(x^2 + x + y^2 + y) + 2$$

т. е. представляет собою число, которое при делении на 4 дает в остатке 2. Между тем, квадрат всякого четного числа должен делиться на 4 без остатка. Значит, сумма квадратов двух нечетных чисел не может быть квадратом четного числа; иначе говоря, наши три числа – не пифагоровы.

Итак, мы должны заключить, что в группе пифагоровых чисел один из «катетов» необходимо должен быть четным. Эта задача соприкасается тесно с геометрией, но она все же по существу относится к свойствам чисел и, следовательно, должна быть рассматриваема, как арифметическая.

Пифагоровы числа обладают вообще рядом любопытных особенностей, которые мы перечисляем далее без доказательств:

- 1) Один из «катетов» должен быть кратным трем.
- 2) Один из «катетов» должен быть кратным четырем.

4) Одно из пифагоровых чисел должно быть кратно пяти.

Читатель может удостовериться в наличии этих свойств, просматривая приведенные выше примеры групп пифагоровых чисел.

ТЕОРЕМА СОФИИ ЖЕРМЕН

Вот задача, предложенная известной французской математичкой Жермен:

Доказать, что каждое число вида $a^4 + 4$ есть составное (если a не равно 1).

Решение

Доказательство вытекает из следующих преобразований:

$$\begin{aligned} a^4 + 4 &= a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - 4a^2 = \\ &= (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = (a^2 + 2 - 2a)(a^2 + 2 + 2a). \end{aligned}$$

Число $a^4 + 4$ может быть, как мы убеждаемся, представлено в виде произведения двух множителей не равных ему самому и единице; иными словами, оно – составное.

СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА

Число так называемых простых чисел, т. е. целых чисел, не делящихся без остатка ни на какие другие целые числа, кроме единицы и самих себя, – бесконечно велико.

Начинаясь числами 1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31..., ряд их простирается без конца. Вклиниваясь между числами составными, они разбивают натуральный ряд чисел на более или менее длинные участки составных чисел. Какой длины бывают эти участки? Следует ли где-нибудь подряд, например, тысяча составных чисел, не прерываясь ни одним простым числом?

Можно доказать, – хотя это и кажется неправдоподобным, – что участки составных чисел между простыми бывают любой длины. Нет границы для длины таких участков: они могут состоять из тысячи, из миллиона, из триллиона и т. д. составных чисел.

Мы докажем это, если найдем общее выражение для ряда из n составных чисел, каждое из которых на единицу больше предыдущего. Для удобства придется в этом случае пользоваться условным символом $n!$, который обозначает произведение всех чисел от 1 до n включительно. Например $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$. Мы сейчас докажем, что ряд

$$[(n+1)! + 2], [(n+1)! + 3], [(n+1)! + 4] \dots$$

до $[(n+1)! + n+1]$ включительно

состоит из n последовательных составных чисел.

Числа эти идут непосредственно друг за другом в натуральном ряду, так как каждое следующее на 1 больше предыдущего. Надо доказать, однако, что все они – составные.

Первое число:

$$(n+1)! + 2 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \dots \times (n+1) + 2$$

– четное, так как оба его слагаемые содержат множитель 2. А всякое четное число, большее 2 – составное.

Второе число:

$$(n+1)! + 3 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \dots (n+1) + 3$$

состоит из двух слагаемых, каждое из которых кратно 3. Значит и это число составное.

Третье число:

$$(n+1)! + 4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \dots (n+1) + 4$$

делится без остатка на 4, так как состоит из слагаемых, кратных 4.

Подобным же образом устанавливаем, что следующее число:

$$(n + 1)! + 5$$

кратно 5 и т. д. Иначе говоря, каждое число нашего ряда содержит множитель, отличный от единицы и его самого; оно является, следовательно, составным.

Если вы желаете написать например, пять последовательных составных чисел, вам достаточно в приведенное раньше общее выражение подставить вместо n число 5. Вы получаете ряд

$$722, 723, 724, 725, 726.$$

Но это не единственный ряд из 5 последовательных составных чисел. Есть и другие. Например

$$62, 63, 64, 65, 66.$$

Или еще меньшие числа:

$$24, 25, 26, 27, 28.$$

Попробуем теперь решить задачу:

Написать десять последовательных составных чисел.

Решение

На основании ранее сказанного устанавливаем, что первое из искоемых десяти чисел есть

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \dots \times 10 \times 11 + 2 = 39\,816\,802.$$

Искомая серия чисел, следовательно, такова:

$$39\,816\,802, 39\,816\,803, 39\,816\,804 \text{ и т. д.}$$

Однако, существуют серии из десяти гораздо меньших составных чисел. Так, можно указать на серию даже не из десяти, а из тринадцати составных последовательных чисел уже во второй сотне:

$$114, 115, 116, 117 \text{ и т. д. до } 126 \text{ включительно.}$$

ЧИСЛО ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Мы сейчас убедились, что практически всегда возможно найти ряд из любого числа последовательных составных чисел – из тысячи, из миллиона, из квадриллиона и т. д. Существование сколь угодно длинных серий последовательных чисел сплошь составных способно возбудить сомнение в том, действительно ли ряд простых чисел не имеет конца. Не лишним будет поэтому привести здесь доказательство бесконечности ряда простых чисел.

Доказательство это принадлежит гениальному основателю геометрии, древнегреческому математику Евклиду и входит в его знаменитые «Начала». Оно относится к разряду доказательств «от противного». Предположим, что ряд простых чисел конечен, и обозначим последнее простое число в этом ряду буквою N . Составим произведение

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \dots N = N!$$

и прибавим к нему 1. Получим

$$N! + 1.$$

Число это не делится без остатка ни на одно из чисел, меньших, чем N , – всякий раз получится остаток 1. Но, быть может, оно делится на какое-нибудь число, большее, чем N ? Что же это, однако, может быть за делитель? Конечно, не простое число, так как простых чисел, больших нежели N , не существует (мы ведь из этого исходим). Значит, оно составное, разлагающееся на множители. Но среди этих множителей должно непременно быть меньшее N (потому что разлагаемое число меньше $N!$), а мы уже знаем, что $N! + 1$ не делится ни на одно из чисел, меньших N , – следовательно, не может делиться и на их произведение

или на число, содержащее множителем хотя бы одно из них.

Итак, нельзя было принять, что ряд простых чисел конечен: предположение это приводит к противоположному заключению. Какую бы длинную серию последовательных составных чисел мы ни встретили в ряду натуральных чисел, мы можем быть убеждены, что за нею найдется еще бесконечное множество простых чисел.

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РАСЧЕТ

В вычислительной практике встречаются такие чисто арифметические выкладки, выполнение которых без помощи облегчающих методов алгебры чрезвычайно затруднительно. Пусть требуется, например, найти результат таких действий:

$$\frac{2}{1 + \frac{1}{90\,000\,000\,000}}.$$

(Вычисление это необходимо для того, чтобы установить, вправе ли современная техника пользоваться прежним законом сложения скоростей, не считаясь с теми изменениями, которые внесены в механику теорией относительности. Согласно старой механике, скорость тела, участвующего в двух одинаково направленных движениях, каждое со скоростью 1 км в секунду, равна 2 км в секунду. Новое же учение дает для этой скорости выражение, приведенное выше. На сколько же разнятся эти результаты? Уловима ли разница для тончайших измерительных приборов? Для выяснения этого важного вопроса и приходится выполнить такое вычисление.)

Сделаем это вычисление двояко: сначала обычным арифметическим путем, а затем покажем, как получить результат приемами алгебры. Достаточно одного взгляда на приведенные далее длинные ряды цифр, чтобы убедиться в неоспоримых преимуществах алгебраического способа.

Прежде всего преобразуем нашу «многоэтажную» дробь:

$$1 + \frac{2}{\frac{1}{90\,000\,000\,000}} = \frac{180\,000\,000\,000}{90\,000\,000\,001}.$$

Произведем теперь деление числителя на знаменатель.

180 000 000 000	90 000 000 001
<u>90 000 000 001</u>	1,999 999 999 977
899 999 999 990	
<u>810 000 000 009</u>	
899 999 999 810	
<u>810 000 000 009</u>	
899 999 998 010	
<u>810 000 000 009</u>	
899 999 980 010	
<u>810 000 000 009</u>	
899 999 800 010	
<u>810 000 000 009</u>	
899 998 000 010	
<u>810 000 000 009</u>	
899 980 000 010	
<u>810 000 000 009</u>	
899 800 000 010	
<u>810 000 000 009</u>	

$$\begin{array}{r}
 898\,000\,000\,010 \\
 810\,000\,000\,009 \\
 \hline
 880\,000\,000\,010 \\
 810\,000\,000\,009 \\
 \hline
 700\,000\,000\,010 \\
 630\,000\,000\,007 \\
 \hline
 70\,000\,000\,003
 \end{array}$$

Вычисление, как видите утомительное, кропотливое; в нем легко запутаться и ошибиться. Между тем, для решения задачи важно в точности знать, на котором именно месте обрывается ряд девяток и начинается серия других цифр.

Сравните теперь, как коротко справляется с тем же расчетом алгебра. Она пользуется следующим приближенным равенством: если a весьма малая дробь, то

$$\frac{1}{1+a} \approx 1-a,$$

где знак \approx означает «приближенно равно».

Убедиться в справедливости этого утверждения очень просто: сравним делимое (1) с произведением делителя на частное

$$1 = (1+a)(1-a),$$

т. е.

$$1 = 1 - a^2.$$

Так как a – весьма малая дробь (например, 0,001), то a^2 еще меньшая дробь (0,000001), и ею можно пренебречь.

Применим сказанное к нашему расчету¹:

¹ Мы пользуемся далее приближенным равенством:

$$\frac{A}{1+a} \approx A(1-a).$$

$$\frac{2}{1 + \frac{1}{90\,000\,000\,000}} = \frac{2}{1 + \frac{1}{9 \times 10^{10}}} =$$

$$= 2 - 0,222 \dots \times 10^{-10} = 2 - 0,0000000000222 \dots =$$

$$= 1,9999999999777 \dots$$

Мы пришли к тому же результату, что и раньше, но гораздо более коротким и надежным путем.

(Читателю вероятно интересно знать, каково значение полученного результата в поставленной нами задаче из области механики. Он показывает, что уклонение от старого закона сложения скоростей хотя и существует, но ни в коем случае не может быть обнаружено; оно сказывается на одиннадцатой цифре определяемого числа, а самые точные измерения длины не идут далее 7-й цифры, в технике же ограничиваются 3 – 4 цифрами. Мы вправе поэтому утверждать без всяких оговорок, что новая, эйнштейнова, механика практически ничего не меняет в современной технике.)

КОГДА БЕЗ АЛГЕБРЫ ПРОЩЕ

Наряду со случаями, когда алгебра оказывает арифметике существенные услуги, бывают и такие, когда вмешательство алгебры вносит лишь ненужное осложнение. Истинное знание математики состоит в умении так распоряжаться математическими средствами, чтобы избирать всегда самый прямой и надежный путь, не считаясь с тем, относится ли метод решения задачи к арифметике, алгебре, геометрии и т. д. Полезно будет поэтому рассмотреть случай, когда привлечение алгебры способно лишь запутать решающего. Поучительным примером может служить следующая задача:

Найти наименьшее из всех тех чисел, которые при делении

на 2 дают в остатке 1

« 3	«	«	«	2
« 4	«	«	«	3
« 5	«	«	«	4
« 6	«	«	«	5
« 7	«	«	«	6
« 8	«	«	«	7
« 9	«	«	«	8

Решение

Задачу эту предложили мне со словами: «Как вы решили бы такую задачу? Здесь слишком много уравнений, не выпутаться из них».

Ларчик просто открывается; никаких уравнений, никакой алгебры для решения задачи не требуется, – она решается несложным арифметическим рассуждением.

Прибавим к искомому числу единицу. Какой остаток даст оно тогда при делении на 2? Остаток $1 + 1 = 2$; другими словами – число разделится на 2 без остатка.

Точно так же разделится оно без остатка и на 3, на 4, на 5, на 6, на 7, на 8 и на 9. Наименьшее из таких чисел есть

$$9 \times 8 \times 7 \times 5 = 2\,520,$$

а искомое число – 2519, что нетрудно проверить испытанием.

В ПОМОЩЬ ГЕОМЕТРИИ

Задача

Не менее часто приходит алгебра и на помощь геометрии. Из многочисленных относящихся сюда примеров рассмотрим только один – задачу о круглом бильярде.

Круглых бильярдных, кажется, не бывает; но если бы какой-нибудь усердный любитель этой игры вздумал изготовить его себе, он мог бы практически решить следующую поучительную задачу:

В a сантиметрах от центра круглого бильярда, радиус которого R , находится шар (рис. 10). Его хотят пустить так, чтобы, отскочив три раза от борта, он прошел вновь через место, откуда вышел. В каком направлении или к какой точке борта надо его пустить?

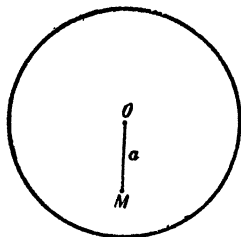


Рис. 10.

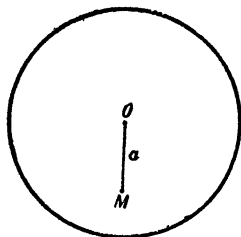


Рис. 11.

Решение

Напомню прежде всего, что упругий шар отскакивает от преграды под углом, равным углу падения (имеются в виду углы между направлением движения и перпендикуляром к плоскости преграды). Напомню также, что перпендикуляром к кривой в данной точке считается перпендикуляр к касательной, проведенной в этой точке.

Рассмотрим теперь рис. 11, на котором обозначен путь шара. Радиусы OB , OA и OC перпендикулярны к касательным и делят углы B , A , C пополам:

$$\angle 1 = \angle 2$$

$$\angle 3 = \angle 4$$

$$\angle 5 = \angle 6$$

Перегнем чертеж по радиусу OA так, чтобы левая часть фигуры легла на правую. AC пойдет по AB , и точка C окажется в B , так как они обе расположены на окружности. Соединив C с B , получаем равнобедренный треугольник BAC . Далее

$$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5 = \angle 6.$$

Следовательно

$$\angle 5 + \angle 6 = \angle 3 + \angle 4$$

или

$$\angle ACM = \angle ABM$$

откуда

$$\angle MBC = \angle MCB$$

Значит, $MC = MB$, и точка M лежит на продолжении радиуса AO .

Установив это, обратимся к рис. 12. Радиус CO – биссектор; он делит основание AM треугольника AMC на части AO и OM , пропорциональные сторонам CA и CM :

$$\frac{AO}{OM} = \frac{CA}{CM} = \frac{m}{c}$$

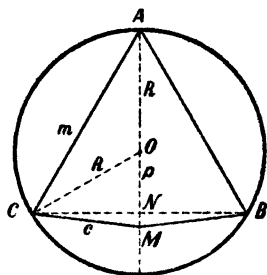


Рис. 12.

Так как OM (расстояние шара от центра) дано и равно a , а $AO = R$, то можно написать

$$\frac{R}{a} = \frac{m}{c}.$$

Далее, из треугольника COM :

$$c^2 = R^2 + a^2 - 2ap$$

Из треугольника COA :

$$m^2 = R^2 + R^2 + 2Rp = 2R^2 + 2Rp.$$

Из пропорции

$$\frac{R}{a} = \frac{m}{c}$$

имеем

$$\frac{c^2}{m^2} = \frac{a^2}{R^2}$$

Подставив вместо c^2 и m^2 сейчас найденные выражения, получаем

$$\frac{R^2 + a^2 - 2ap}{2R^2 + 2Rp} = \frac{a^2}{R^2}$$

Делаем преобразования:

$$R^4 + a^2 R^2 - 2apR^2 = 2a^2 R^2 + 2a^2 pR$$

$$R^3 + a^2 R - 2apR = 2a^2 R + 2a^2 p$$

$$R^3 + a^2 R = 2ap(a + R)$$

$$R(R^2 - a^2) = 2ap(a + R)$$

$$R(R - a) = 2ap$$

$$p = \frac{R(R - a)}{2a}.$$

Отсюда вытекает способ нахождения точки B борта биллиарда, куда должен быть направлен шар. Отрезок p можно, как видим, построить (или вычислить). Определив p , откладываем его от центра круга по диаметру, проведенному через точку M , и восставляем в точке N перпендикуляр до пересечения с окружностью, т. е. с бортом биллиарда. Точка пересечения и есть искомая точка B .

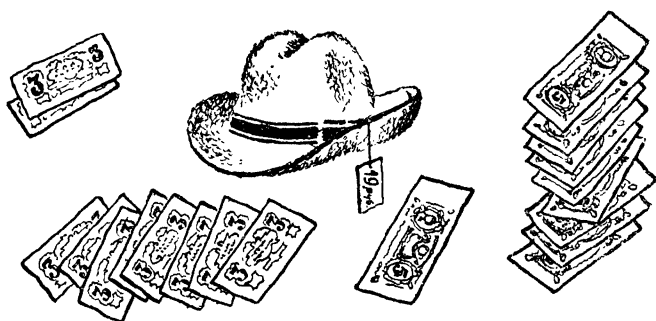
Установим, при каком условии задача имеет решение. Оно существует, очевидно, лишь в том случае, если отрезок p меньше радиуса, т. е.

$$\frac{R(R - a)}{2a} < R,$$

откуда легко найти, что

$$a > \frac{R}{3}$$

Значит, если шар отстоит от центра биллиарда менее, чем на $\frac{1}{3}$ радиуса, задача не имеет решения: пустить шар требуемым образом невозможно.



Глава четвертая

ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ

ПОКУПКА ШЛЯПЫ

Задача

Вы должны уплатить за купленную в магазине шляпу 19 руб. У вас одни лишь трехрублевки, у кассира – только пятирублевки. Можете ли вы, при наличии таких денег, расплатиться с кассиром и как именно?

Вопрос задачи сводится к тому, чтобы узнать, сколько должны вы дать кассиру трехрублевок, чтобы, получив сдачу пятирублевками, уплатить 19 рублей. Известных в задаче два – число (x) трехрублевок и число (y) пятирублевок. Но можно составить только одно уравнение

$$3x - 5y = 19.$$

Хотя одно уравнение с двумя неизвестными имеет бесчисленное множество решений, это все же не значит, что задача наша неразрешима. Ведь вполне достаточно в данном случае найти хотя бы одно решение. Вот почему алгебра разработала метод решения подоб-

ных «неопределенных» уравнений. Заслуга введения их в алгебру принадлежит первому европейскому представителю этой науки, знаменитому математику древности Диофанту, отчего такие уравнения часто называют «диофантовыми».

Решение

На приведенном ранее примере покажем, как следует решать подобные уравнения.

Надо найти значения x и y в уравнении

$$3x - 5y = 19.$$

зная при этом, что x и y – числа целые и положительные (вспомним, что это – числа кредитных билетов).

Уединим то неизвестное, коэффициент которого меньше, т. е. член $3x$; получим:

$$3x = 19 + 5y,$$

откуда

$$x = \frac{19}{3} + \frac{5y}{3} = 6\frac{1}{3} + 1\frac{2}{3}y = 6 + y + \frac{1+2y}{3}.$$

Так как x , 6 и y – числа целые, то равенство может быть верно лишь при условии, что $\frac{1+2y}{3}$ есть также целое число. Обозначим его буквою t . Тогда

$$x = 6 + y + t$$

где

$$t = \frac{1+2y}{3},$$

и значит

$$3t = 1 + 2y; \quad 2y = 3t - 1.$$

Из последнего уравнения определяем y :

$$y = \frac{3t}{2} - \frac{1}{2} = t + \frac{t-1}{2}.$$

Так как y и t – числа целые, то и $\frac{t-1}{2}$ должно быть некоторым целым числом t_1 . Следовательно,

$$y = t + t_1$$

причем

$$t_1 = \frac{t-1}{2}.$$

откуда

$$2t_1 = t - 1 \quad \text{и} \quad t = 2t_1 + 1.$$

Значение $t = 2t_1 + 1$ подставляем в предыдущие равенства:

$$y = t + t_1 = (2t_1 + 1) + t_1 = 3t_1 + 1;$$

$$x = 6 + y + t = 6 + (3t_1 + 1) + (2t_1 + 1) = 8 + 5t_1.$$

Итак, для x и y мы нашли выражения:

$$x = 8 + 5t_1,$$

$$y = 3t_1 + 1.$$

Числа x и y , мы знаем, не только целые, но и положительные, т. е. большие чем 0. Следовательно,

$$8 + 5t_1 > 0$$

$$3t_1 + 1 > 0$$

Из этих неравенств находим:

$$5t_1 > -8 \quad \text{и} \quad t_1 > -\frac{8}{5};$$

$$3t_1 > -1 \quad \text{и} \quad t_1 > -\frac{1}{3}.$$

Этим величина t_1 ограничивается; она больше чем $-\frac{1}{3}$ (и значит, подавно больше $-\frac{8}{5}$). Но так как t_1 чис-

ло целое, то для него возможны лишь следующие значения:

$$t_1 = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

Соответствующие значения для x и y таковы:

$$x = 8 + 5t_1 = 8, 13, 18, 23 \dots$$

$$y = 3t_1 + 1 = 1, 4, 7, 10 \dots$$

Теперь мы установили, как может быть произведена уплата:

вы либо платите 8 трехрублевых, получая одну пятирублевку сдачи:

$$8 \times 3 - 5 = 19,$$

либо платите 13 трехрублевых, получая сдачи 4 пятирублевки:

$$13 \times 3 - 4 \times 5 = 19$$

и т. д.

Теоретически задача имеет бесчисленный ряд решений, практически же число решений ограничено, так как ни у покупателя, ни у кассира нет бесчисленного множества кредитных билетов. Если, например, у каждого всего по 10 билетов, то расплата может быть произведена только одним способом: выдачей 8 трехрублевых и получением 5 рублей сдачи. Как видим, неопределенные уравнения практически могут давать вполне определенные пары решений.

Возвращаясь к нашей задаче, предлагаем читателю, в качестве упражнения, самостоятельно решить ее вариант, а именно, – рассмотреть случай, когда у покупателя только пятирублевки, а у кассира только трехрублевки. В результате получите такой ряд решений:

$$x = 5, 8, 11 \dots$$

$$y = 2, 7, 12 \dots$$

Действительно:

$$5 \times 5 - 2 \times 3 = 19$$

$$8 \times 5 - 7 \times 3 = 19$$

$$11 \times 5 - 12 \times 3 = 19.$$

Мы могли бы получить эти результаты также и из готового уже решения основной задачи, воспользовавшись простым алгебраическим приемом. Так как давать пятирублевки и получать трехрублевки все равно, что «получать отрицательные пятирублевки» и «давать отрицательные трехрублевки», то новый вариант задачи решается тем же уравнением, которое мы составили для основной задачи:

$$3x - 5y = 19$$

при условии, что x и y – числа отрицательные. Поэтому из равенств

$$x = 8 + 5t_1$$

$$y = 3t_1 + 1$$

мы, зная, что $x < 0$ и $y < 0$, выводим:

$$8 + 5t_1 < 0$$

$$3t_1 + 1 < 0$$

и, следовательно,

$$t_1 < -\frac{8}{5}.$$

Принимая $t_1 = -2, -3, -4$ и т. д., получаем из предыдущих формул следующие значения для x и y :

$t_1 = -2$	-3	-4
$x = -2$	-7	-12
$y = -5$	-8	-11

Первая пара решений, $x = -2$, $y = -5$, означает, что покупатель «платит минус 2 трехрублевки» и «получает минус 5 пятирублевок», т. е. в переводе на обычный язык – платит 5 пятирублевок и получает сдачи 2 трехрублевки. Подобным же образом истолковываем и прочие решения.

РЕВИЗИЯ КООПЕРАТИВА

Задача

При ревизии торговых книг кооператива одна из записей оказалась залитой чернилами и имела такой вид (рис. 13):

За кусков мадеполама¹
по 49 р. 36 к. кусок *** 7 р. 28 к.

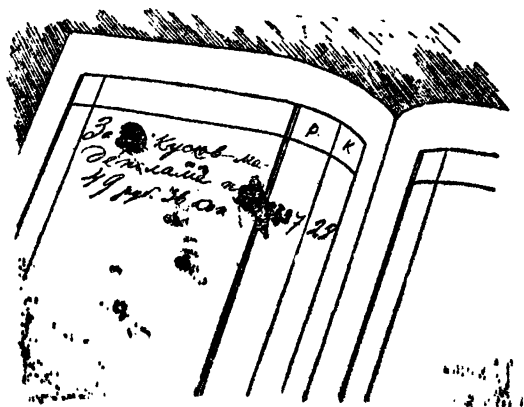


Рис. 13.

Невозможно было разобрать число проданных кусков, но было несомненно, что число это не дробное; в вырученной сумме можно было различить только последние три цифры, да установить еще, что перед ними были три каких-то других цифры.

¹ Мадаполам – сорт хлопчатобумажной ткани (прим. ред.).

Может ли ревизионная комиссия по этим следам установить запись?

Решение

Обозначим число кусков через x . Вырученная сумма выразится в копейках через

$$4\,936x.$$

Число, выражаемое тремя залитыми цифрами в записи денежной суммы, обозначим через y . Это, очевидно, число тысяч копеек, а вся сумма в копейках изобразится так:

$$1\,000y + 728.$$

Имеем уравнение:

$$4\,936x = 1\,000y + 728,$$

или, после сокращения на 8,

$$617x - 125y = 91.$$

В этом уравнении x и y – числа целые, и притом y не больше 999, так как более чем из трех цифр оно состоять не может. Решаем уравнение, как раньше было указано:

$$125y = 617x - 91$$

$$y = 5x - 1 + \frac{34 - 8x}{125} = 5x - 1 + \frac{2(17 - 4x)}{125} = 5x - 1 + 2t.$$

(Здесь мы приняли $\frac{617}{125} = 5 - \frac{8}{125}$, так как нам выгодно иметь возможно меньшие остатки.)

$$\text{Дробь} \quad \frac{2(17 - 4x)}{125}$$

где есть целое число, а так как 2 не делится на 125, то

$\frac{17-4x}{125}$ должно быть целым числом, которое мы и обо-

значили через t .

Далее из уравнения

$$\frac{17-4x}{125} = t$$

имеем

$$x = 4 - 31t + \frac{1-t}{4} = 4 - 31t + t_1,$$

где

$$t_1 = \frac{1-t}{4},$$

и, следовательно,

$$4t_1 = 1-t; \quad t = 1-4t_1$$

$$x = 125t_1 - 27, \quad y = 617t_1 - 134^1.$$

Мы знаем, что

$$100 \leq y < 1000.$$

Следовательно,

$$100 \leq (617t_1 - 134) < 1000,$$

откуда

$$t_1 \geq \frac{234}{617} \quad \text{и} \quad t_1 \geq \frac{1134}{617}$$

или

$$0,4 < t_1 < 1,8.$$

¹ Обратите внимание на то, что коэффициенты при t_1 равны коэффициентам при x и y в исходном уравнении $617x - 125y = 91$, причем у одного из коэффициентов при t_1 знак обратный. Это не случайность: можно доказать, что так должно быть всегда.

Очевидно, для t_1 существует только одно целое значение:

$$t_1 = 1,$$

и тогда $x = 98$, $y = 483$: было отпущено 98 кусков на сумму 4 837 р. 28 к. Запись восстановлена.

ПОКУПКА ПОЧТОВЫХ МАРОК

Задача

Требуется на 1 рубль купить 20 штук почтовых марок – 15-копеечных, 5-копеечных и копеечных. Сколько окажется марок каждого достоинства?

Решение

В этом случае у нас имеется два уравнения с тремя неизвестными

$$15x + 5y + z = 100$$

$$x + y + z = 20,$$

где x – число марок 15-копеечных, y – пятикопеечных, z – копеечных. Вычтя из первого уравнения второе, получим одно уравнение с двумя неизвестными

$$14x + 4y = 80.$$

Делим все члены на 4:

$$7 \times \frac{x}{2} + y = 20.$$

Очевидно $\frac{x}{2}$ число целое. Обозначим его через t .

Имеем

$$7t + y = 20;$$

$$y = 20 - 7t, \quad x = 2t.$$

Подставляем выражения для x и y во второе из исходных уравнений:

$$2t + 20 - 7t + z = 20;$$

имеем

$$z = 5t.$$

Так как $x > 0$, $y > 0$ и $z > 0$, то нетрудно установить границы для t

$$0 < t < 2 \frac{6}{7},$$

откуда заключаем, что для t возможны только два целых значения

$$t = 1 \text{ и } t = 2,$$

Соответствующие значения x, y, z таковы:

$t =$	1	2
$x =$	2	4
$y =$	13	6
$z =$	5	10

Проверка

$$2 \times 15 + 13 \times 5 + 5 = 100$$

$$4 \times 15 + 6 \times 5 + 10 = 100$$

Итак, покупка марок может быть произведена только двумя способами.

Следующая задача в том же роде.

ПОКУПКА ФРУКТОВ

Задача

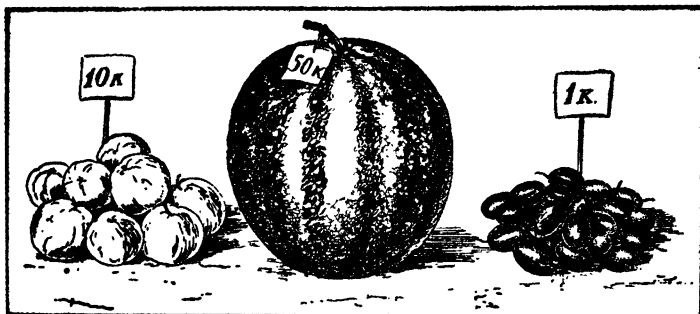
На 5 руб. куплено 100 штук разных фруктов. Цены на фрукты в кооперативе таковы:

арбузы, штука..... 50 к.

яблоко «.....10 «

сливы «.....1 «

Сколько фруктов каждого рода было куплено?



Решение

Обозначив число арбузов через x , яблок через y и слив через z , составляем два уравнения:

$$\begin{cases} 50x + 10y + z = 500 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

Вычтя из первого второе, имеем

$$49x + 9y = 400.$$

Дальнейший ход решения таков:

$$y = \frac{400 - 49x}{9} = 44 - 5x + \frac{4(1 - x)}{9} = 44 - 5x + 4t;$$

$$t = \frac{1 - x}{9} ; \quad x = 1 - 9t;$$

$$y = 44 - 5(1 - 9t) + 4t = 39 + 49t.$$

Из неравенств

$$1 - 9t > 0 \quad \text{и} \quad 39 + 49t > 0$$

устанавливаем, что

$$\frac{1}{9} > t > -\frac{39}{49}$$

и, следовательно, $t = 0$. Поэтому

$$x = 1, \quad y = 39.$$

Подставив эти значения x и y во второе уравнение, определяем $z = 60$.

Итак, куплен был 1 арбуз, 39 яблок и 60 слив. Других комбинаций быть не может.

ОТГАДАТЬ ДЕНЬ РОЖДЕНИЯ

Задача

Умение решать неопределенные уравнения дает возможность выполнить следующий математический фокус.

Вы предлагаете товарищу умножить число даты его рождения на 12, а номер месяца – на 31. Он сообщает вам сумму обоих произведений, и вы вычисляете по ней дату рождения.

Если, например, товарищ ваш родился 9 февраля, то он выполняет следующие выкладки:

$$9 \times 12 = 108 \quad 2 \times 31 = 62$$

$$108 + 62 = 170.$$

Это последнее число, 170, он сообщает вам, и вы определяете задуманную дату. Как?

Решение

Задача сводится к решению неопределенного уравнения

$$12x + 31y = 170$$

в целых и положительных числах, причем число месяца x не больше 31, а номер месяца y не больше 12. Решаем:

$$6x + 31 \times \frac{y}{2} = 85$$

$$6x + 31t = 85, \quad y = 2t,$$

$$x = \frac{85 - 31t}{6} = 14 - 5t + \frac{1 - t}{6} = 14 - 5t + t_1$$

$$\begin{aligned}
 1 - t &= 6t_1; & t &= 1 - 6t_1, \\
 x &= 14 - 5(1 - 6t_1) + t_1 = 9 + 31t_1 \\
 y &= 2(1 - 6t_1) = 2 - 12t_1.
 \end{aligned}$$

Зная, что $31 \geq x > 0$ и $12 \geq y > 0$, находим границы для t_1 :

$$-\frac{5}{6} \leq t_1 \leq \frac{22}{31}$$

Следовательно,

$$t_1 = 0; \quad x = 9; \quad y = 2.$$

Дата рождения 9-е число второго месяца, т. е. 9 февраля. Теоретически можно доказать, что какая бы дата ни отгадывалась, уравнение имеет всегда только одно решение, т. е. фокус удаётся без отказа.

ПРОДАЖА КУР

Старинная задача

Три сестры пришли на рынок с курами. Одна принесла для продажи 10 кур, другая 16, третья 26. До полудня они продали часть своих кур по одной и той же цене. После полудня, опасаясь, что не все куры будут проданы, они понизили цену и распродали оставшихся кур снова по одинаковой цене. Домой все трое вернулись с одинаковой выручкой: каждая сестра получила от продажи 35 рублей.

По какой цене продавали они кур до и после полудня?

Решение

Обозначим число кур, проданных каждой сестрой до полудня, через x , y , z . Во вторую половину дня они продали $10 - x$, $16 - y$, $26 - z$. Цену до полудня обозначим через m , после полудня – через n . Для ясности со-

поставим эти обозначения:

	Число кур			Цена
До полудня	x	y	z	m
После полудня . .	$10 - x$	$16 - y$	$26 - z$	n

Первая сестра выручила: $mx + n(10 - x)$; следовательно, $mx + n(10 - x) = 35$,

вторая –

$my + n(16 - y)$; следовательно, $my + n(16 - y) = 35$,

третья –

$mz + n(26 - z)$; следовательно, $mz + n(26 - z) = 35$.

Преобразуем эти три уравнения; получаем:

$$\begin{cases} (m - n)x + 10n = 35 \\ (m - n)y + 16n = 35 \\ (m - n)z + 26n = 35. \end{cases}$$

Вычтя из третьего уравнения первое, затем второе, получим последовательно

$$\begin{cases} (m - n)(z - x) + 16n = 0 \\ (m - n)(z - y) + 10n = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (m - n)(x - z) = 16n \\ (m - n)(y - z) = 10n. \end{cases}$$

Делим первое из этих уравнений на второе:

$$\frac{x - z}{y - z} = \frac{8}{5}, \quad \text{или} \quad \frac{x - z}{8} = \frac{y - z}{5}.$$

Так как x, y, z – числа целые, то и разности $x - z, y - z$ тоже целые числа. Поэтому для существования равенства

$$\frac{x - z}{8} = \frac{y - z}{5}$$

необходимо, чтобы $x - z$ делилось на 8, а $y - z$ на 5. Следовательно

$$\frac{x-z}{8} = t = \frac{y-z}{5}$$

откуда

$$x = z + 8t$$

$$y = z + 5t$$

Так как $x < 10$, то

$$z + 8t < 10.$$

При целых и положительных z и t последнее неравенство удовлетворяется только в одном случае: когда $z = 1$, и $t = 1$. Подставив эти значения в уравнения

$$x = z + 8t \quad \text{и} \quad y = z + 5t,$$

находим $x = 9$, $y = 6$.

Теперь, обращаясь к уравнениям

$$mx + n(10 - x) = 35,$$

$$my + n(16 - y) = 35,$$

$$mz + n(26 - z) = 35$$

и подставив в них значения x , y , z , узнаем цены, по каким продавались куры

$$m = 3\frac{3}{4} \text{ руб.}; \quad n = 1\frac{1}{4} \text{ руб.}$$

Итак, куры продавались до полудня по 3 руб. 75 коп., после полудня по 1 руб. 25 коп.

ДВА ЧИСЛА И ЧЕТЫРЕ ДЕЙСТВИЯ

Задача

Предыдущую задачу, которая привела к трем уравнениям с пятью неизвестными, мы решили не по общему образцу, а по свободному математическому сообщению. Точно так же будем решать и следующие задачи, приводящие к неопределенным уравнениям второй степени.

Вот первая из них.

Над двумя целыми числами сделаны были следующие 4 действия:

- 1) их сложили;
- 2) вычли из большего меньшее;
- 3) перемножили;
- 4) разделили большее на меньшее.

Полученные результаты сложили – составилось 243.
Найти эти числа.

Решение

Если большее число x , меньшее y , то

$$x + y + x - y + xy + \frac{x}{y} = 243.$$

Делаем следующие преобразования:

Поэтому

$$2x + xy + \frac{x}{y} = 243$$

$$2xy + xy^2 + x = 234y$$

$$x(2y + y^2 + 1) = 234y.$$

Но $(2y + y^2 + 1) = (y + 1)^2$. Поэтому

$$x = \frac{243y}{(y + 1)^2}.$$

Чтобы x было целое число, знаменатель $(y + 1)^2$ должен быть одним из делителей числа 243 (потому что y не может делиться на $y + 1$). Зная, что $243 = 3 \times 9^2 = 27 \times 3^2$, заключаем, что $(y + 1)^2 = 9^2$ или 3^2 , а $y = 8$ или 2 .

Тогда

$$x = \frac{243 \times 8}{81}, \quad \text{или} \quad \frac{243 \times 2}{9}$$

Итак, искомые числа – 24 и 8 или 52 и 2.

КАКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНИК?

Задача

Стороны прямоугольника выражаются целыми числами. Какой длины должны они быть, чтобы сумма их численно равнялась площади прямоугольника?

Решение

Обозначив стороны прямоугольника через x и y , составляем уравнение

$$2x + 2y = xy$$

Преобразуем его:

$$\begin{aligned}x(y - 2) &= 2y \\x &= \frac{2y}{y - 2} = \frac{2}{1 - \frac{2}{y}}\end{aligned}$$

Чтобы x было числом положительным, необходимо иметь

$$1 - \frac{2}{y} > 0 \quad \text{и, следовательно, } y > 2.$$

Итак, y должно быть больше 2. Это условие необходимо, чтобы x было положительным, но еще недостаточно. Заметим, что

$$x = \frac{2y}{y - 2} = \frac{2(y - 2) + 4}{y - 2} = 2 + \frac{4}{y - 2}$$

Так как x должно быть целым числом, то и выражение $\frac{4}{y - 2}$ должно быть целым числом. Но при $y > 2$ это возможно лишь, если $y = 3, 4$ или 6 . Соответствующие значения x будут $6, 4, 3$.

Итак, искомая фигура есть либо прямоугольник со сторонами 3 и 6 , либо квадрат со сторонами 4 .

ДВА ДВУЗНАЧНЫХ ЧИСЛА

Задача

Числа 46 и 96 обладают любопытной особенностью: их произведение не меняет своей величины, если переставить их цифры.

Действительно,

$$46 \times 96 = 4416 = 64 \times 69.$$

Требуется установить, существуют ли еще другие пары двузначных чисел с тем же свойством. Как разыскать их все?

Решение

Обозначив цифры искомых чисел через x и y , z и t , составляем уравнение

$$(10x + y)(10z + t) = (10y + x)(10t + z).$$

Раскрыв скобки, получаем после упрощений

$$xz = yt,$$

где x, z, y, t – целые числа, меньшие 10. Для разыскания решений составляем из 9 цифр все пары с равными произведениями

$$1 \times 4 = 2 \times 2 \qquad 2 \times 8 = 4 \times 4$$

$$1 \times 6 = 2 \times 3 \qquad 2 \times 9 = 3 \times 6$$

$$1 \times 8 = 4 \times 2 \qquad 3 \times 8 = 4 \times 6$$

$$1 \times 9 = 3 \times 3 \qquad 4 \times 9 = 6 \times 6$$

$$2 \times 6 = 3 \times 4$$

Всех равенств 9. Из каждого можно составить одну или две искомые группы чисел. Например, из равенства $1 \times 4 = 2 \times 2$ составляем одно решение:

$$12 \times 42 = 21 \times 24.$$

Из равенства $1 \times 6 = 2 \times 3$ находим два решения:

$$12 \times 63 = 21 \times 36; \quad 13 \times 62 = 31 \times 26.$$

Таким образом разыскиваем следующие 14 решений:

$12 \times 42 = 21 \times 24$	$23 \times 96 = 32 \times 69$
$12 \times 63 = 21 \times 36$	$24 \times 63 = 42 \times 36$
$12 \times 84 = 21 \times 48$	$24 \times 84 = 42 \times 48$
$13 \times 62 = 31 \times 26$	$26 \times 93 = 62 \times 39$
$13 \times 93 = 31 \times 39$	$34 \times 86 = 43 \times 68$
$14 \times 82 = 41 \times 28$	$36 \times 84 = 63 \times 48$
$23 \times 64 = 32 \times 46$	$46 \times 96 = 64 \times 69$

ОБМЕН ЧАСОВЫХ СТРЕЛОК

Задача

Биограф и друг знаменитого физика А. Эйнштейна, небезызвестный математик А. Мошковский¹, желая однажды развлечь своего приятеля во время болезни, предложил ему задачу, относящуюся к рассматриваемому нами отделу алгебры (рис. 14).

«Возьмем, – сказал Мошковский, – положение стрелок в 12 часов. Если бы в этом положении большая и малая стрелки обменялись местами, они дали бы все же правильные показания. Но в другие моменты, – например, в 6 часов, взаимный обмен стрелок привел бы к абсурду, к положению, какого на правильно идущих часах быть не может: минутная стрелка не может стоять на 6, когда часовая показывает 12. Возникает вопрос:

¹ Александр Мошковский (1851-1934) немецко-польский писатель, издатель, популяризатор науки (прим. ред.).

Когда и как часто стрелки часов занимают такие положения, что замена одна другой дает новое положение, тоже возможное на правильных часах?

– Да, – ответил Эйнштейн, – это вполне подходящая задача для человека, вынужденного из-за болезни оставаться в постели: достаточно интересная и не слишком легкая. Боюсь только, что развлечение продлится недолго: я уже напал на путь к решению.

И приподнявшись на постели, он несколькими штрихами набросал на бумаге схему, изображающую условия задачи. Для решения ему понадобилось не больше времени, чем мне на формулировку задачи. Получилось неопределенное уравнение, которое он решил в целых числах».

Как же решается эта задача?

Решение

Будем измерять расстояния стрелок по кругу циферблата от точки, где цифра 12, в 60-х долях окружности.

Так как минутная стрелка обходит полный круг в час, а часовая успевает в то же время пройти только $\frac{1}{12}$ часть круга, то каждое деление, составляющее $\frac{1}{60}$ круга, минутная стрелка проходит в 1 минуту, а часовая – в 12 минут.

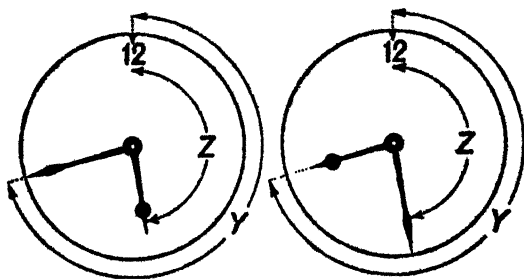


Рис. 14.

Пусть одно из требуемых положений стрелок наблюдалось в x часов y минут (рис. 14). Минутная стрелка находится от цифры 12 в y делениях, часовая – на некотором расстоянии в z делений. Установим зависимость между x , y и z . Так как от 12 прошло x часов, то минутная стрелка сделала x полных оборотов и еще y делений, т. е. в итоге продвинулась на $60x + y$ делений. Часовая стрелка, движущаяся в 12 раз медленнее, прошла 12-ю долю от $60x + y$, значит ее расстояние (z делений) от цифры 12 составляет

$$z = \frac{60x + y}{12}$$

Когда стрелки обменяются местами, часы будут показывать новое число x_1 часов и z минут, причем часовая стрелка будет отстоять от цифры 12 на y делений. Это расстояние y должно равняться

$$y = \frac{60x_1 + z}{12}$$

Имеем систему двух уравнений с 4 неизвестными

$$\begin{cases} z = \frac{60x + y}{12} \\ y = \frac{60x_1 + z}{12} \end{cases}$$

в которых x и x_1 целые числа от 0 до 11¹. Чтобы найти эти значения неизвестных, выразим z и y через x и x_1 . Получим

$$\begin{aligned} y &= \frac{60(x + 12x_1)}{143} \\ z &= \frac{60(x_1 + 12x)}{143} \end{aligned}$$

¹ Значения $x = 12$, $x_1 = 12$ практически равнозначат $x = 0$, $x_1 = 0$.

В этих двух выражениях x и x_1 целые числа часов; они могут меняться от 0 до 11.

$$x = 0, 1, 2, 3, \dots 11$$

$$x_1 = 0, 1, 2, 3, \dots 11.$$

Давая x и x_1 эти значения, мы определим все требуемые моменты. Так как каждое из 12 значений x можно сопоставлять с каждым из 12 значений x_1 , то, казалось бы, что число всех решений равно $12 \times 12 = 144$. Но в действительности оно равно 143, потому что при $x = 0$, $x_1 = 0$ и при $x = 11$, $x_1 = 11$ получается, одно и то же положение стрелок.

При $x = 0$, $x_1 = 0$ имеем

$$z = 0, y = 0,$$

т. е. часы показывают 12.

Всех возможных положений мы рассматривать не станем; возьмем лишь два примера.

$$x = 1, \quad x_1 = 1,$$

$$y = \frac{60 \times 13}{143} = 5 \frac{5}{11};$$

$$z = 5 \frac{5}{11},$$

т. е. часы показывают 1 ч. $5 \frac{5}{11}$ мин., и притом стрелки встречаются; их положение, конечно, может быть обменено (как и при всех других встречах стрелок).

Второй пример:

$$x = 5, \quad x_1 = 8,$$

$$y = \frac{60 (5 + 12 \times 8)}{143} = 42,3$$

$$z = \frac{60 (8 + 12 \times 5)}{143} = 28,5$$

Соответствующие моменты: 5 ч. 42,3 мин. и 8 ч. 28,5 мин.

Число решений, мы знаем, 143. Чтобы найти все точки циферблата, которые дают требуемые положения стрелок, надо окружность циферблата разделить на 143 равные части: получим 143 точки, являющиеся искомыми. В промежуточных точках требуемые положения стрелок невозможны.

Первоначальным автором этой задачи является известный французский математик Ш. Лезан¹, прославившийся у нас талантливой книжкой «Начатки математики». Задача была опубликована им во французском «Журнале элементарной математики» в 1882 г.

СТО ТЫСЯЧ ЗА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Одна задача из области неопределенных уравнений приобрела в последние десятилетия громкую известность, так как за правильное ее решение завещано целое состояние: 100 000 немецких марок!

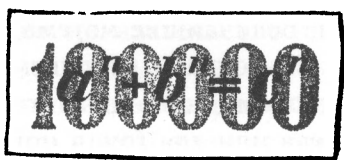


Рис. 15.

Задача состоит в том, чтобы доказать следующее положение, носящее название теоремы, или «великого предложения», Ферма:

сумма одинаковых степеней двух целых чисел не может быть тою же степенью ка-

¹ Лезан Шарль Анж (1841-1920) французский математик (прим. ред.).

кого-либо третьего числа. Исключение составляет лишь вторая степень, для которой это возможно.

Иначе говоря, надо доказать, что уравнение

$$x^n + y^n = z^n$$

неразрешимо в целых числах для $n > 2$ (рис. 15).

Поясним сказанное. Довольно легко подобрать, сколько угодно пар чисел, сумма вторых степеней которых также есть вторая степень. Простейший пример: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Но попробуйте составить аналогичный пример для третьих степеней: ваши поиски останутся тщетными¹.

Тот же неуспех ожидает вас и при подыскании примеров для четвертой, пятой, шестой и т. д. степеней. Это и утверждает «великое предложение Ферма».

Что же требуется от соискателей премии? Они должны доказать это положение. Дело в том, что теорема Ферма еще не доказана и висит, так сказать, в воздухе.

Прошло свыше двух столетий с тех пор, как она высказана, но математикам не удалось до сих пор найти ее доказательства. Величайшие математики трудились над этой проблемой, – однако, в лучшем случае им удавалось доказать теорему лишь для того или иного отдельного показателя или для групп показателей, – необходимо же найти общее доказательство для всякого целого показателя.

Замечательно, что неуловимое доказательство теоремы Ферма, по-видимому, однажды уже было найдено, но затем вновь утрачено. Автор теоремы, гениаль-

¹ Любопытно, однако, что сумма кубов трех целых чисел может быть кубом четвертого целого числа, как, например, в ряду следующих четырех чисел:

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3.$$

ный математик XVII в. Пьер Ферма¹, утверждал, что ее доказательство ему известно. Свое «великое предложение» он записал (как и ряд других теорем из теории чисел) в виде заметки на полях сочинения Диофанта, сопроводив его такой припиской:

«Я нашел поистине удивительное доказательство этого предложения, но здесь мало места, чтобы его привести».

Ни в бумагах великого математика, ни в его дружеской переписке, нигде вообще в другом месте следов этого доказательства найти не удалось.

Последователям Ферма пришлось идти самостоятельным путем. Вот результаты этих усилий: Эйлер (в 1770 г.) доказал теорему Ферма для третьей степени; для пятой степени ² ее доказал Лежандр (в 1825 г.), для седьмой – Ламе и Лебег (1839). В 1849 г. Куммер доказал теорему для обширной группы степеней и между прочим – для всех показателей меньше ста. Эти последние работы далеко выходят за пределы той области математики, какая знакома была Ферма, и становится загадочным, как мог последний разыскать общее доказательство своего «великого предложения» ³.

Завещание, сделавшее теорему Ферма столь популярной, оставлено в 1907 году на имя геттингенской

¹ Ферма (1603–1665) не был профессионалом-математиком. Юрист по образованию, советник парламента, он занимался математическими изысканиями лишь между делом. Это не помешало ему сделать ряд чрезвычайно важных открытий, которых он, впрочем, не публиковал, а по обычаю той эпохи сообщал в письмах к своим ученым друзьям: к Паскалю, Декарту, Гюйгенсу, Робервалю и др.

² Для составных показателей особого доказательства не требуются: эти случаи сводятся к случаям с первоначальными показателями.

³ Теорема Ферма доказана в 1994 году Эндрю Уайлсом (прим. ред.).

академии наук. Вот текст соответствующего объявления этой академии, опубликованного 27 июня 1908 г.

«Согласно завещанию, оставленному на наше имя покойным доктором Павлом Вольфскелем ¹ в Дармштадте, объявляется премия в 100 000 марок тому, кому раньше всех удастся найти доказательство «великой теоремы Ферма». Д-р Вольфскель обращает внимание на то, что Ферма высказал утверждение, что уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет целых решений для всех нечетных простых показателей. Теорема Ферма должна быть доказана либо в самой общей форме, либо в форме дополнения к исследованиям Куммера, – но во всяком случае для всех показателей n , для которых теорема вообще имеет место.

Премия учреждается на следующих условиях:

Геттингенской академии наук принадлежит право свободно решить, кому должна быть присуждена премия. Никаких рукописей, имеющих отношение к соисканию премии, она не принимает; она рассматривает только такие математические сочинения, которые появились в журналах или выпущены отдельными книгами, имеющимися в продаже. Академия предлагает авторам подобных сочинений прислать ей 5 печатных экземпляров.

Академия слагает с себя ответственность за нерассмотрение работ, о которых она не была осведомлена, а также за недоразумения, могущие возникнуть из-за того, что истинный автор работы (или части ее) остался академии неизвестным.

Присуждение премии последует не ранее двух лет с момента появления сочинения, достойного премии. В течение этого срока все германские и иные математи-

¹ Пауль Вольфскель (1856-1906) немецкий промышленник (прим. ред.).

ки могут высказаться по поводу правильности предложенного решения.

Акт о присуждении премии не может быть оспариваем. Если к 13 сентября 2007 года премия не будет присуждена, то никаких притязаний на нее предъявлено быть не может».

К объявлению геттингенской академии, которое приведено здесь с несущественными пропусками, интересно присоединить замечания, сделанные по этому поводу знаменитым германским математиком Ф. Клейном, ныне умершим: «Со времени первого опубликования завещания Вольфскеля в геттингенскую академию поступило уже несколько сот так называемых «доказательств» теоремы Ферма, и надо думать, что после официального объявления о премии число их значительно возрастет. При этом число подлинных математиков, участвующих в соискании, весьма незначительно. Большая часть решений поступает от инженеров, учащихся, учителей и т. д. И ни один из соискателей не вступил на путь исследований, основанных на теории чисел, – путь, который во всяком случае имел в виду завещатель. Очевидно, желание овладеть 100 000 марок гораздо более распространено, чем интерес к глубоким соотношениям в области современной математики.

При таком положении дела, очевидно, невозможно и даже бесполезно для академии вступать в переписку с отдельными соискателями по поводу ошибочности их доказательств. Академия выступит только тогда, когда ей будет доставлено правильное доказательство. Пока же она молчит, до сих пор, следовательно, правильное решение еще не предложено».

Какие ошибки возможны в поисках этого неуловимого доказательства, показывает случай с выдающимся немецким математиком Ф. Линдеманом.

В 1909 году он выпустил сочинение, в котором предложены были им два доказательства теоремы Ферма. Его готовы были уже считать лауреатом премии, как выяснилось, что в ход его выкладок вкрались ошибки: в одном месте – ошибочная подстановка, в другом – простая описка (показатель 6, вместо 5). Ошибки были обнаружены одним из русских математиков.

Необычайный в науке трюк выкинули немецкие математики Дюринги – отец и сын. Незадолго до империалистической войны они печатно объявили, что доказательство теоремы Ферма ими найдено, но... они не желают его оглашать. Излишне добавлять, что подобные заявления никем не могут быть приняты серьезно.

Как бы то ни было, премия до сих пор никому не присуждена; только из процентов, выросших на завещанный капитал, была выдана некоторая сумма двум математикам за их работы, относящиеся к рассматриваемой проблеме.

Впрочем, завещатель, очевидно, и не ожидал быстрого разрешения поставленной задачи: завещание предусматривает столетний срок существования премии¹.

Среди читателей «Занимательной алгебры» нашлось немало таких, которые пытались разрешить задачу Ферма. К сожалению, они лишь увеличили и без того богатую коллекцию неправильных доказательств «великого предложения». Наиболее распространенная ошибка состояла в следующем: равенство $x^n + y^n = z^n$ преобразовывалось в такое, одна часть которого алгебраически разлагается на множители, содержащиеся в другой части. Насколько такой прием недоказателен, видно хотя бы из

¹ В настоящее время в связи с послевоенной инфляцией марки, премия Вольфскеля потеряла свою ценность.

того, что, пользуясь им, легко «доказать» невозможность существования пифагоровых чисел, т. е. доказать неразрешимость в целых числах уравнения

$$x^2 + y^2 = z^2$$

В самом деле: представив его в виде

$$x^2 - z^2 = -y^2,$$

видим, что левая часть равенства делится на $x + z$ и на $x - z$, в то время как правая не делится на эти выражения. Но разве отсюда следует неразрешимость в целых числах уравнения $x^2 + y^2 = z^2$? Ряд примеров, приведенных на стр. 99, служит ответом на этот вопрос.

В заключение небезынтересно отметить, что уравнение

$$x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}} = z^{\frac{1}{n}}$$

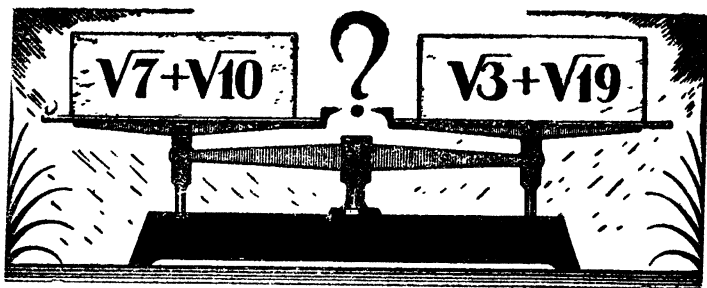
легко разрешается в целых и положительных числах для всякого целого n . Возьмем для примера $n = 5$. Тогда понадобится найти корни уравнения:

$$x^{\frac{1}{5}} + y^{\frac{1}{5}} = z^{\frac{1}{5}}, \text{ или } \sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y} = \sqrt[5]{z};$$

выбрав для x и y пятые степени любых чисел, например, приравняв $x = 2^5$, $y = 3^5$, получаем для $\sqrt[5]{z}$ значение $\sqrt[5]{2^5} + \sqrt[5]{3^5} = 5$; откуда $z = 5^5$. Уравнение превращается в тождество:

$$32^{\frac{1}{5}} + 243^{\frac{1}{5}} = 3125^{\frac{1}{5}}.$$

Интересующимся историей и современным состоянием задачи Ферма можно рекомендовать брошюру А. Я. Хинчина «Великая теорема Ферма». Написанная специалистом брошюра эта предполагает у читателя лишь элементарные знания из математики.



Глава пятая

ШЕСТОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ

ШЕСТОЕ ДЕЙСТВИЕ

Сложение и умножение имеют по одному обратному действию, которое называется вычитанием и делением. Пятое математическое действие – возвышение в степень – имеет два обратных: разыскание основания и разыскание показателя. Разыскание основания есть шестое математическое действие и называется извлечением корня. Нахождение показателя – седьмое действие – называется логарифмированием. Причину того, что возвышение в степень имеет два обратных действия, в то время как сложение и умножение – только по одному, понять нетрудно: разыскание каждого из чисел, участвующего в сложении и умножении, производится одинаковыми приемами, но разыскание основания степени и ее показателя выполняется совершенно различным образом.

Шестое действие, извлечение корня, обозначается знаком $\sqrt{}$. Не все знают, что это – видоизменение латинской буквы *r* начальной в слове, означающем «корень». Было время (XVI в.), когда знаком корня служила не строчная, а прописная буква *R*, а рядом с ней ста-

вилась первая буква латинских слов «квадратный» (*q*) или кубический (*c*), чтобы указать, какой именно корень требуется извлечь ¹. Например, писали

R.q. 4352

вместо нынешнего обозначения

$$\sqrt{4\ 352}$$

Если прибавить к этому, что в ту эпоху еще не вошли в общее употребление нынешние знаки для плюса и минуса, а вместо них писали буквы *p.* и *m.*, и что наши скобки заменяли знаками \perp \lrcorner , то станет ясно, какой необычный для современного глаза вид должны были иметь тогда алгебраические выражения.

Вот пример из книги старинного математика Бомбели (1572 г.)

R.c. \perp R.q. 4\ 352\ p. 16\ \lrcorner m. R. c. \perp R. q. 4\ 352\ m. 16\ \lrcorner.

Мы написали бы то же самое иными знаками:

$$\sqrt[3]{\sqrt{4\ 352 + 16}} - \sqrt[3]{\sqrt{4\ 352 - 16}}.$$

Кроме обозначения $\sqrt[n]{a}$, теперь употребляется для того же действия еще и другое, $a^{\frac{1}{n}}$, весьма удобное в смысле обобщения: оно наглядно подчеркивает, что каждый корень есть не что иное, как степень, показатель которой – дробное, число. Оно предложено было замечательным голландским математиком XVI в. Стевином ².

¹ В учебнике математики Магницкого ³, по которому обучались у нас в течение всей первой половины XVIII в., вовсе нет особого знака для действия извлечения корня.

² Симон Стевин (1548-1620) голландский математик.

³ Леонтий Филиппович Магницкий (1669-1739) русский математик и педагог (прим. ред.).

НАКИДКИ

Задача

Чтобы показать, как может возникнуть извлечение корня даже высоких степеней в практическом обиходе, рассмотрим следующую задачу.

Товар, прежде чем дойти до потребителя, прошел восемь учреждений, каждое из которых накидывало одинаковое число процентов к той цене, по какой само получало. В результате потребителю пришлось приобретать товар с надбавкой в 100% к первоначальной цене.

Сколько процентов накидывало каждое учреждение?

Решение

Если первоначальная цена товара a , и каждое учреждение накидывало x процентов, то второе учреждение платило за товар

$$a + a \times \frac{x}{100} = a \left(1 + \frac{x}{100} \right);$$

третье учреждение получило товар за цену

$$\begin{aligned} a \left(1 + \frac{x}{100} \right) + a \left(1 + \frac{x}{100} \right) \frac{x}{100} = \\ = a \left(1 + \frac{x}{100} \right) \left(1 + \frac{x}{100} \right) = a \left(1 + \frac{x}{100} \right)^2. \end{aligned}$$

Таким же образом мы найдем, что четвертое учреждение приобрело товар по цене

$$a \left(1 + \frac{x}{100} \right) \left(1 + \frac{x}{100} \right) \left(1 + \frac{x}{100} \right) = a \left(1 + \frac{x}{100} \right)^3.$$

Восьмое – по цене

$$a \left(1 + \frac{x}{100} \right)^7.$$

А до потребителя, после восьмой накладки, товар дошел по цене

$$a\left(1 + \frac{x}{100}\right)^8.$$

Из условия задачи известно, что окончательная цена была выше первоначальной на 100%, т. е. равнялась $2a$; следовательно,

$$a\left(1 + \frac{x}{100}\right)^8 = 2a \quad \text{и} \quad \left(1 + \frac{x}{100}\right)^8 = 2,$$

откуда

$$1 + \frac{x}{100} = \sqrt[8]{2}.$$

Чтобы вычислить $\sqrt[8]{2}$, представим этот корень в виде

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$$

и вычислим последовательно:

$$\sqrt{2} = 1,41; \quad \sqrt{1,41} = 1,19; \quad \sqrt{1,19} = 1,09;$$

Значит,

$$1 + \frac{x}{100} = 1,09 \quad \text{и} \quad x = 9.$$

Каждое учреждение накидывало 9%.

ИЗ ЗАДАЧ ЭДИСОНА

Задача

Твердое знание алгебры предполагает уверенное обращение с радикалами, прочные навыки в безошибочном их преобразовании. На практике это – умение целесообразно преобразовывать сложные выражения, содержащие радикалы, приводя их к более простому виду, весьма важно, – и недаром в числе вопросов, предложенных Эдисоном юным соискателям его стипендии ¹, мы

¹ См. примечание на стр. 68.

находим довольно сложную задачу этого рода.

Вот она:

Упростить выражение

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}} \times \\ \times \left[\frac{(\sqrt{x+1}+1) \frac{1}{2} (x+1)^{-\frac{1}{2}} - (\sqrt{x+1}-1) \frac{1}{2} (x+1)^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{x+1}+1)^2} \right].$$

Решение

Займемся сначала числителем дроби, заключенной в скобки. Вынеся за скобки

$$\frac{1}{2} (x+1)^{-\frac{1}{2}},$$

получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (x+1)^{-\frac{1}{2}} (\sqrt{x+1}+1-\sqrt{x+1}+1) = \\ = \frac{1}{2} \times 2 (x+1)^{-\frac{1}{2}} = (x+1)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Дробь, стоящую впереди квадратных скобок, представим в виде

$$\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}$$

и умножим числитель и знаменатель этой дроби на ее числитель.

$$\frac{(\sqrt{x+1}+1)^2}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{(\sqrt{x+1}+1)^2}{(\sqrt{x+1})^2-1} = \frac{(\sqrt{x+1}+1)^2}{x}.$$

Мы привели первоначальное выражение к виду:

$$\frac{(\sqrt{x+1}+1)^2}{x} \times \frac{(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{x+1}+1)^2}.$$

После сокращения и несложного преобразования оно упрощается в

$$\frac{1}{x\sqrt{x+1}}.$$

ЧТО БОЛЬШЕ?

Задача первая

Что больше: $\sqrt[5]{5}$ или $\sqrt{2}$?

Эту и следующие задачи требуется решить, не вычисляя значения корней.

Решение

Возвысив оба выражения в 10-ю степень, получаем

$$(\sqrt[5]{5})^{10} = 5^2 = 25 \quad (\sqrt{2})^{10} = 2^5 = 32,$$

так как $32 > 25$, то

$$\sqrt{2} > \sqrt[5]{5}.$$

Задача вторая

Что больше: $\sqrt[4]{4}$ или $\sqrt[7]{7}$?

Решение

Возвысив оба выражения в 28-ю степень, получаем

$$(\sqrt[4]{4})^{28} = 4^7 = 2^{14} = 2^7 \times 2^7 = 128^2$$

$$(\sqrt[7]{7})^{28} = 7^4 = 7^2 \times 7^2 = 49^2.$$

Так как $128^2 > 49^2$, то и

$$\sqrt[4]{4} > \sqrt[7]{7}.$$

Задача третья

Что больше: $\sqrt{7} + \sqrt{10}$ или $\sqrt{3} + \sqrt{19}$?

Решение

Возвысив оба выражения в квадрат, получаем:

$$(\sqrt{7} + \sqrt{10})^2 = 17 + 2\sqrt{70}$$

$$(\sqrt{3} + \sqrt{19})^2 = 22 + 2\sqrt{57}.$$

Уменьшим оба выражения на 17; у нас останется:

$$2\sqrt{70} \quad \text{и} \quad 5 + 2\sqrt{57}.$$

Возвышаем эти выражения в квадрат. Имеем:

$$280 \text{ и } 253 + 20\sqrt{57}.$$

Отняв по 253, сравниваем

$$27 \text{ и } 20\sqrt{57}.$$

Так как $\sqrt{57}$ больше 7, то $20\sqrt{57} > 27$ и, следовательно,

$$\sqrt{3} + \sqrt{19} > \sqrt{7} + \sqrt{10}.$$

РЕШИТЬ ОДНИМ ВЗГЛЯДОМ

Задача

Взгляните внимательнее на уравнение $x^{x^3} = 3$ и скажите, чему равен x .

Решение

Каждый, хорошо освоившийся с алгебраическими символами, сообразит, что

$$x = \sqrt[3]{3}$$

В самом деле

$$x^3 = (\sqrt[3]{3})^3 = 3.$$

Но если

$$x^3 = 3$$

то

$$x = \sqrt[3]{3}$$

Для кого это «решение одним взглядом» является непосильным, тот может облегчить себе поиски неизвестного следующим образом:

Пусть

$$x^3 = y$$

Тогда

$$x = \sqrt[3]{y}$$

и уравнение получает вид

$$(\sqrt[3]{y})^y = 3.$$

Ясно, что $y = 3$ и, следовательно,

$$x = \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{3}.$$

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПАРАДОКСЫ

Задача первая

Шестое математическое действие дает возможность разыгрывать настоящие алгебраические комедии и фарсы на такие сюжеты, как $2 \times 2 = 5$, $2 = 3$ и т. п. Юмор подобных математических представлений кроется в том, что ошибка – довольно элементарная – несколько замаскирована и не сразу бросается в глаза. Исполним две пьесы этого комического репертуара из области алгебры.

Первая:

$$2 = 3.$$

На сцене сперва появляется неоспоримое равенство:

$$4 - 10 = 9 - 15.$$

В следующем «явлении» к обеим частям равенства прибавляется по равной величине $6\frac{1}{4}$:



$$4 - 10 + 6\frac{1}{4} = 9 - 15 + 6\frac{1}{4}.$$

Дальнейший ход комедии состоит в преобразовани-
ях:

$$2^2 - 2 \times 2 \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 3^2 - 2 \times 3 \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2.$$

Извлекая из обеих частей равенства квадратный ко-
рень, получают

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}.$$

Прибавляя по $\frac{5}{2}$ к обеим частям, приходят к неле-
пому равенству

$$2 = 3.$$

В чем же кроется ошибка?

Решение

Ошибка проскользнула в следующем заключении:
из того, что

$$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2.$$

был сделан вывод, что

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}.$$

Но из того, что квадраты равны, вовсе не следует, что равны первые степени. Ведь $(-5)^2 = 5^2$, но -5 не равно 5 . Квадраты могут быть равны и тогда, когда первые степени разнятся знаками. В нашем примере мы имеем именно такой случай

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

но $-\frac{1}{2}$ не равно $\frac{1}{2}$.

Задача вторая

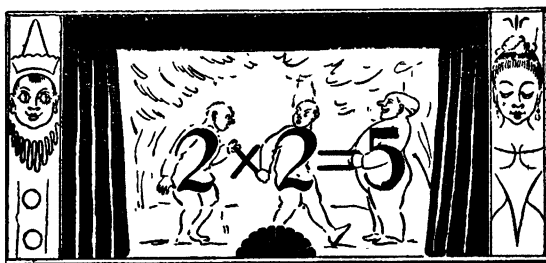


Рис. 16.

Другой алгебраический фарс (рис. 16)

$$2 \times 2 = 5$$

разыгрывается по образцу предыдущего и основан на том же трюке. На сцене появляется не внушающее сомнения равенство

$$16 - 36 = 25 - 45.$$

Прибавляются равные числа

$$16 - 36 + 20\frac{1}{4} = 25 - 45 + 20\frac{1}{4}$$

и делаются следующие преобразования

$$4^2 - 2 \times 4 \times \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2.$$

Затем, помощью того же незаконного заключения переходят к финалу:

$$4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}.$$

$$4 = 5$$

$$2 \times 2 = 5$$

Эти комические случаи должны предостеречь малоопытного математика от неосмотрительных операций с уравнениями, содержащими неизвестное под знаком корня.



Глава шестая

УРАВНЕНИЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

РУКОПОЖАТИЯ

Задача

Любую задачу, приводящую к уравнению первой степени, можно решить и без уравнения, по свободному соображению. Иное дело – задачи, приводящие к уравнению второй степени: справиться с ними при-



емами арифметики удастся очень редко, даже если задача и вовсе не сложна. Пусть читатель попытается арифметически решить, например, такую задачу.

Участники заседания обменялись рукопожатиями, и кто-то подсчитал, что всех рукопожатий было 66. Сколько человек явилось на заседание?

Решение

Алгебраически задача решается весьма просто. Каждый из x участников пожал $x - 1$ рук. Значит, всех рукопожатий должно было быть $x(x - 1)$; но надо принять во внимание, что когда Иванов пожимает руку Петрова, то и Петров пожимает руку Иванова; эти два рукопожатия следует считать за одно. Поэтому число пересчитанных рукопожатий вдвое меньше, нежели $x(x - 1)$. Имеем уравнение

$$\frac{x(x - 1)}{2} = 66$$

или, после преобразований,

$$x^2 - x - 132 = 0$$

откуда

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 528}}{2}$$

$$x_1 = 12; \quad x_2 = -11.$$

Так как отрицательное решение (-11 человек) в данном случае лишено реального смысла, мы его отбрасываем и сохраняем только первый корень: в заседании участвовало 12 человек.

Арифметически решить эту задачу можно лишь соответствующим подбором множителей числа 132: ряд проб приведет к числам 12×11 .

ПЧЕЛИНЫЙ РОЙ

Задача

В древней Индии распространен был своеобразный вид спорта – публичное соревнование в решении головоломных задач. Индусские математические руководства имели отчасти целью служить пособием для подобных состязаний на первенство в умственном спорте. «По изложенным здесь правилам, – пишет составитель одного из таких учебников, – мудрый может придумать тысячу других задач. Как солнце блеском своим затмевает звезды, так и ученый человек затмит славу другого в народных собраниях, предлагая и решая алгебраические задачи». В подлиннике это высказано поэтичнее, так как вся книга написана стихами. Задачи тоже облекались в форму стихотворений. Приведем одну из них в прозаической передаче.

Пчелы, в числе, равном квадратному корню из половины всего их роя, сели на куст жасмина, оставив позади себя $\frac{8}{9}$ роя. И только одна пчелка из того же роя кружится возле лотоса, привлеченная жужжанием подруги, неосторожно попавшей в западню сладко пахнущего цветка. Сколько всех пчел в рое?

Решение

Для устного решения задача не легка; она приводит к квадратному уравнению и потому не поддается разрешению арифметическими приемами. Если обозначить искомую численность роя через x , то уравнение имеет вид

$$\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8}{9}x + 2 = x.$$

Мы можем придать ему более простой вид, введя вспомогательное неизвестное

$$y = \sqrt{\frac{x}{2}}.$$

Тогда $x = 2y^2$ и уравнение получится такое:

$$y + \frac{16y^2}{9} + 2 = 2y^2, \text{ или } 2y^2 - 9y - 18 = 0.$$

Решив его, получаем два значения для y :

$$y_1 = 6; \quad y_2 = -\frac{3}{2}.$$

Соответствующие значения для x :

$$x_1 = 72; \quad x_2 = 4,5.$$

Так как число пчел должно быть целое и положительное, то удовлетворяет задаче только первый корень: рой состоял из 72 пчел. Проверим:

$$\sqrt{\frac{72}{2}} + \frac{8}{9} \times 72 + 2 = 6 + 64 + 2 = 72.$$

СТАЯ ОБЕЗЬЯН

Задача

Другую индусскую задачу я имею возможность привести в стихотворной передаче, так как ее перевел автор превосходной книжечки «Кто изобрел алгебру?» Вас. Ив. Лебедев:

На две партии разбившись,
Забавлялись обезьяны.
Часть восьмая их в квадрате
В роще весело резвилась;
Криком радостным двенадцать

Воздух свежий оглашали.
Вместе сколько, ты мне скажешь,
Обезьян там было в роще?

Решение

Если общая численность стаи x , то

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x,$$

откуда

$$x_1 = 48, \quad x_2 = 16.$$

Задача имеет два положительных решения: в стае могло бы быть или 48 животных или 16. Оба ответа вполне удовлетворяют задаче.

ПРЕДУСМОТРИТЕЛЬНОСТЬ УРАВНЕНИЙ

В рассмотренных случаях полученными двумя решениями уравнений мы распоряжались различно, в зависимости от условия задачи. В первом случае мы отбросили отрицательный корень, как не отвечающий содержанию задачи; во втором отказались от дробного и отрицательного корня. В третьей задаче, напротив, воспользовались обоими корнями. Существование второго решения является иной раз полной неожиданностью не только для решившего задачу, но даже и для придумавшего ее. Приведем пример, когда уравнение оказывается словно предусмотрительнее того, кто его составил.

Мяч брошен вверх со скоростью 25 м в секунду. Через сколько секунд он будет на высоте 20 м над землей?

Решение

Для тел, брошенных вверх, при отсутствии сопротивления воздуха, механика устанавливает следующее соотношение между высотой поднятия (h), начальной скоростью (v), ускорением тяжести (g) и числом секунд поднятия (t):

$$h = vt - \frac{gt^2}{2}.$$

Сопротивлением воздуха мы можем в данном случае пренебречь, так как при незначительных скоростях оно не столь велико, а мы за строгой точностью не гонимся. Ради упрощения расчетов примем g равным не 9,8 м, а 10 м (ошибка всего в 2%). Подставив в приведенную формулу значения h , v и g , получаем уравнение:

$$20 = 25t - \frac{10t^2}{2},$$

а после упрощения

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

Решив уравнение, имеем

$$t_1 = 1, \text{ и } t_2 = 4.$$

Мяч будет на высоте 20 м дважды: через 1 секунду и через 4 секунды.

Это может, пожалуй, показаться невероятным и, не вдумавшись, мы готовы второе решение отбросить. Но так поступить было бы ошибкой! Второе решение имеет полный смысл; мяч должен действительно дважды побывать на высоте 20 м: раз при подъеме и вторично – при обратном падении. Легко рассчитать, что мяч при начальной скорости 25 м в секунду

должен лететь вверх 2,5 секунды и залететь на высоту 31,25 м. Достигнув через 1 секунду высоты 20 м, мяч будет подниматься еще 1,5 сек., затем столько же времени опускаться вниз снова до уровня 20 м и, спустя секунду, достигнет земли.

ЗАДАЧА ЭЙЛЕРА

Стендаль в «Автобиографии» рассказывает следующее о годах своего учения:

«Я нашел у него (учителя математики) Эйлера и его задачи о числе яиц, которые крестьянка несла на рынок... Это было для меня открытием. Я понял, что значит пользоваться орудием, называемым алгеброй. Но, черт возьми, никто мне об этом ничего не говорил...»

Вот эта задача из «Введения в алгебру» Эйлера, произведшая на ум молодого Стендаля столь сильное впечатление.

Две крестьянки принесли на рынок вместе 100 яиц, одна больше, нежели другая; обе выручили одинаковые суммы. Первая сказала тогда второй: «Будь у меня твои яйца, я выручила бы 15 крейцеров». Вторая ответила: «А будь твои яйца у меня, я выручила бы за них $6\frac{2}{3}$ крейцера». Сколько яиц было у каждой?

Решение

Пусть у первой крестьянки x яиц, у второй 100 – x . Если бы первая имела 100 – x яиц, она выручила бы, мы знаем, 15 крейцеров. Значит, первая крестьянка продала яйца по цене

$$\frac{15}{100 - x}$$

Таким же образом находим, что вторая крестьянка продавала яйца по цене

$$6 \frac{2}{3} : x = \frac{20}{3x}.$$

Теперь определяется действительная выручка каждой крестьянки:

первой:

$$x \times \frac{15}{100 - x} = \frac{15x}{100 - x};$$

второй

$$(100 - x) \times \frac{20}{3x} = \frac{20(100 - x)}{3x}.$$

Так как выручки обеих одинаковы, то

$$\frac{15x}{100 - x} = \frac{20(100 - x)}{3x}.$$

После преобразований имеем:

$$x^2 + 160x - 8\,000 = 0,$$

откуда

$$x_1 = 40; \quad x_2 = -200.$$

Отрицательный корень в данном случае не имеет смысла; у задачи только одно решение: первая крестьянка принесла 40 яиц, вторая 60.

Задача может быть решена еще другим, более кратким способом. Этот способ гораздо остроумнее, но зато и отыскать его значительно труднее.

Предположим, что вторая крестьянка имела в k раз больше яиц, чем первая. Выручили они одинаковые суммы; это значит, что первая крестьянка продавала свои яйца в k раз дороже, чем вторая. Если бы перед торговлей они поменялись яйцами, то первая кре-

стьянка имела бы в k раз больше яиц, чем вторая, и продавала бы их в k раз дороже. Это значит, что она выручила бы в k^2 больше денег, чем вторая. Следовательно, имеем:

$$k^2 = 15 : 6 \frac{2}{3} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4};$$

отсюда

$$k = \frac{3}{2}.$$

Теперь остается 100 яиц разделить в отношении 3 : 2. Легко находим, что первая крестьянка имела 40, а вторая 60 яиц.

ГРОМКОГОВОРИТЕЛИ

Задача

На площади установлено 5 громкоговорителей, разбитые на две группы: в одной 2, в другой 3 аппарата. Расстояние между группами 50 м. Где надо стать, чтобы звуки обеих групп доносились с одинаковой силой?



Рис. 17.

Решение

Если расстояние искомой точки от меньшей группы обозначим через x , то расстояние ее от большей группы выразится через $50 - x$ (рис. 17). Зная, что сила звука ослабевает пропорционально квадрату расстояния, имеем уравнение:

$$\frac{2}{3} = \frac{x^2}{(50 - x)^2},$$

которое после упрощения приводится к виду

$$x^2 + 200x - 5\,000 = 0.$$

Решив его, получаем два корня

$$x_1 = 22,5$$

$$x_2 = -222,5$$

Положительный корень прямо отвечает на вопрос задачи: точка равной слышимости расположена в 22,5 м от группы из двух громкоговорителей и, следовательно, в 27,5 м от группы трех аппаратов.

Но что означает отрицательный корень уравнения? Имеет ли он смысл?

Безусловно. Знак минус означает, что вторая точка равной слышимости лежит в направлении, противоположном тому, которое принято было за положительное при составлении уравнения.

Отложив от местонахождения двух аппаратов в требуемом направлении 222,5 м, найдем точку, куда звуки обеих групп громкоговорителей доносятся с одинаковой силой. От группы из трех аппаратов точка эта отстоит в $222,5 + 50 = 272,5$ м.

Итак, нами разысканы две точки равной слышимости из тех, что лежат на прямой, соединяющей источники звука. Других таких точек на этой линии нет, — но они имеются вне ее. В подробных курсах геометрии

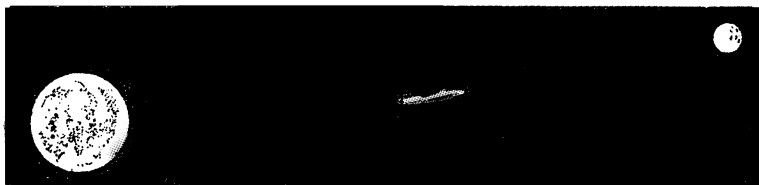
доказывается, что геометрическое место точек, удовлетворяющих требованию нашей задачи, есть окружность, проведенная через обе сейчас найденные точки, как через концы диаметра. Окружность эта ограничивает участок, как видим, довольно обширный, внутри которого слышимость группы двух громкоговорителей пересиливает слышимость группы трех аппаратов; а за пределами круга наблюдается обратное явление.

АЛГЕБРА ЛУННОГО ПЕРЕЛЕТА

Рассмотренная сейчас задача о громкоговорителях находится в неожиданно близкой связи с проблемой перелета на Луну на ракетном корабле. Многие высказывают опасения, не окажется ли чересчур трудным делом метко попасть в такую маленькую мишень на небе: ведь поперечник Луны усматривается нами под углом всего в полградуса. Ближайшее рассмотрение вопроса выясняет, что цель предприятия будет достигнута, если ракете удастся перелететь через точку равного притяжения Земли и Луны, – дальше ракетный корабль уже неизбежно должен двигаться к Луне под действием ее притяжения. Разыщем эту точку равного притяжения.

По закону Ньютона, сила взаимного притяжения двух тел прямо пропорциональна произведению притягивающихся масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Если масса Земли M , а расстояние ракеты от нее x , то сила, с какою Земля притягивает каждый грамм массы ракеты, выразится через

$$\frac{Mk}{x^2}$$



где k – сила взаимного притяжения одного грамма одним граммом на расстоянии в 1 см.

Сила, с какой Луна притягивает каждый грамм ракеты в той же точке, равна

$$\frac{mk}{(l-x)^2},$$

где m – масса Луны, а l – ее расстояние от Земли (ракета предполагается находящейся между Землей и Луной на прямой линии, соединяющей их центры). Задача требует, чтобы

$$\frac{Mk}{x^2} = \frac{mk}{(l-x)^2}$$

или

$$\frac{M}{m} = \frac{x^2}{l^2 - 2lx + x^2}$$

Отношение $\frac{M}{m}$ равно – как известно из астрономии – 81,6; подставив, имеем:

$$\frac{x^2}{l^2 - 2lx + x^2} = 81,6,$$

откуда

$$80,6x^2 - 163,2lx + 81,6l^2 = 0.$$

Решив уравнение относительно x , получаем

$$x_1 = 0,9l; \quad x_2 = 1,11l.$$

Как и в задаче о громкоговорителях, мы приходим к заключению, что на линии Земля – Луна существуют две искомые точки, – две точки, где ракета должна одинаково притягиваться обоими светилами; одна на 0,9 расстояния между ними, считая от центра Земли, другая – на 1,11 того же расстояния. Так как расстояние l между центрами Земли и Луны = 384 000 км, то одна из искомых точек отстоит от земли на 342 000 км, другая – на 426 000 км.

Но мы знаем (см. предыдущую задачу), что тем же свойством обладают и все точки окружности, проходящей через найденные две точки как через концы диаметра. Если будем вращать эту окружность около линии,

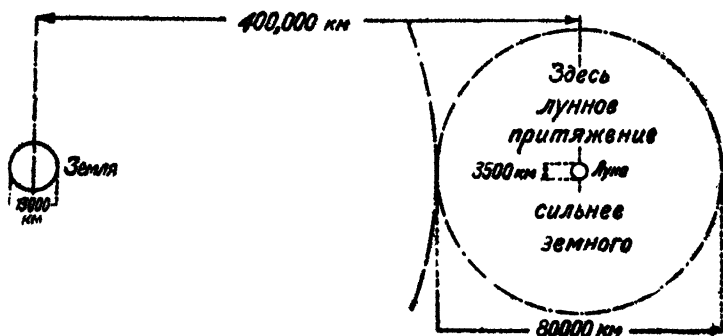


Рис. 18.

соединяющей центры Земли и Луны, то она опишет шаровую поверхность, все точки которой будут удовлетворять требованиям задачи.

Диаметр этого шара равен, как легко сообразить,

$$0,1l + 0,11l = 0,21l = 80\,000 \text{ км.}$$

Если ракета очутится внутри этого шара (обладая не слишком значительной скоростью), она неизбежно должна будет упасть на поверхность Луны, так как сила лунного притяжения в этой области преодолагает силу притяжения Земли.

Мишень, в которую должна попасть ракета, мы видим, гораздо больше, чем можно думать. Она занимает на небе не полградуса, а – как показывает несложный геометрический расчет – около 12°. Это значительно облегчает задачу звездоплавателей¹.

На этот раз уравнение оказалось словно прозорливее того, кто его составлял. Приступая к задаче, разве думали вы, что земное притяжение сильнее лунного не только впереди Луны, но и позади нее? Алгебраический анализ неожиданно раскрыл вам это обстоятельство и помог в точности разграничить сферы влияния обоих светил.

«ТРУДНАЯ ЗАДАЧА»

Картина Богданова-Бельского «Трудная задача» известна многим, но мало кто из видевших эту картину вникал в содержание той «трудной задачи», которая на ней изображена. Состоит она в том, чтобы устным счетом быстро найти результат вычисления:

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}$$

Задача в самом деле нелегкая. С нею, однако, хорошо справлялись ученики того учителя, который с со-

¹ На подробностях проектов лунных перелетов мы здесь, конечно, останавливаться не можем. Интересующиеся этой проблемой найдут ее изложение и разбор связанных с ней математических вопросов в моей книге «Межпланетные путешествия», изд. 9-е, 1934.

хранением портретного сходства изображен на картине, именно С. А. Рачинского, профессора естественных наук, покинувшего университетскую кафедру, чтобы сделаться рядовым учителем сельской школы. Талантливый педагог культивировал в своей школе устный счет, основанный на виртуозном использовании свойств чисел. Числа 10, 11, 12, 13 и 14 обладают любопытной особенностью:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2.$$

Так как $100 + 121 + 144 = 365$, то легко рассчитать в уме, что воспроизведенное на картине выражение равно 2.

Алгебра дает нам средство поставить вопрос об этой интересной особенности ряда чисел более широко: единственный ли это ряд из пяти последовательных чисел сумма квадратов первых трех из которых равна сумме квадратов двух последних?

Решение

Обозначив первое из искомых чисел через x , имеем уравнение:

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = (x+3)^2 + (x+4)^2.$$

Удобнее, однако, обозначить через x не первое, а второе из искомых чисел. Тогда уравнение будет иметь более простой вид:

$$(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2 + (x+3)^2.$$

Раскрыв скобки и сделав упрощения, получаем:

$$x^2 - 10x - 11 = 0,$$

откуда

$$x = 5 \pm \sqrt{25 + 11}; \quad x_1 = 11; \quad x_2 = -1.$$

Существуют, следовательно два ряда чисел, обладающих требуемым свойством: ряд Рачинского

$$10, 11, 12, 13, 14$$

и ряд

$$-2, -1, 0, 1, 2.$$

В самом деле

$$(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 = 1^2 + 2^2.$$

СУММА КУБОВ

Задача

С рассмотренной сейчас задачей сходна следующая. Найти четыре таких последовательных числа, куб последнего из которых равен сумме кубов трех предыдущих.

Решение

В этом случае уравнение получается более простого вида, если через x обозначить первое из искомых чисел:

$$x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 = (x+3)^3.$$

Раскрыв скобки и сделав приведение, получаем:

$$x^3 - 6x - 9 = 0.$$

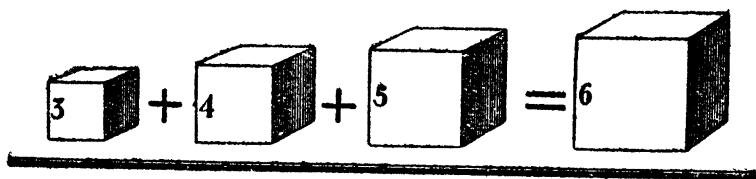


Рис. 19.

Мы имеем уравнение третьей степени, которое однако, можно привести к квадратному. Для этого представим его в виде

$$x^3 - 9x + 3x - 9 = 0.$$

и преобразуем так:

$$x(x^2 - 9) + 3(x - 3) = 0$$

$$x(x + 3)(x - 3) + 3(x - 3) = 0$$

$$(x - 3)[x(x + 3) + 3] = 0$$

$$(x - 3)(x^2 + 3x + 3) = 0$$

Произведение двух множителей может равняться нулю, когда один из них или оба равны нулю, т. е. когда

$$x - 3 = 0, \quad \text{или} \quad x^2 + 3x + 3 = 0.$$

Из первого уравнения следует, что $x = 3$: это один корень кубического уравнения. Два другие найдем, решив уравнение

$$x^2 + 3x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{3}.$$

Так как квадратный корень из отрицательного числа есть величина мнимая, то два последних корня приходится отбросить. Задача, следовательно, имеет только одно решение, а именно 3, 4, 5 и 6:

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3.$$

Это означает, между прочим, что куб, ребро которого 6 см^3 равновелик сумме трех кубов, ребра которых равны 3 см, 4 см и 5 см – соотношение, которое, по преданию, весьма занимало Платона.

КАКИЕ ЧИСЛА?

Задача

Найти три последовательных числа, отличающиеся тем свойством, что квадрат среднего на 1 больше произведения двух остальных.

Решение

Если первое из искомых чисел x , то уравнение имеет вид:

$$(x + 1)^2 = x(x + 2) + 1.$$

Раскрыв скобки, получаем

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2x + 1,$$

или $0 = 0$, – равенство, из которого нельзя определить величину x . Это показывает, что составленное нами равенство есть тождество; оно справедливо при любом значении входящей в него буквы, а не при некоторых лишь, как в случае уравнения. Значит, всякие три последовательных числа обладают требуемым свойством. В самом деле, возьмем наугад числа

$$17, 18, 19.$$

Мы убеждаемся, что

$$18^2 - 17 \times 19 = 324 - 323 = 1.$$

Необходимость такого соотношения выступает нагляднее, если обозначить через x второе число. Тогда получим равенство

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1),$$

т. е. очевидное тождество.

ДВА ПОЕЗДА

Задача

Два железнодорожных пути скрещиваются под прямым углом. К месту скрещения одновременно мчатся по этим путям два поезда: один со станции, находящейся в 40 км от скрещения, другой – со станции в 50 км от того

же места скрещения. Первый делает в минуту 800 м, второй – 600 м.

Через сколько минут, считая с момента отправления, паровозы были в наименьшем взаимном расстоянии? И как велико это расстояние?

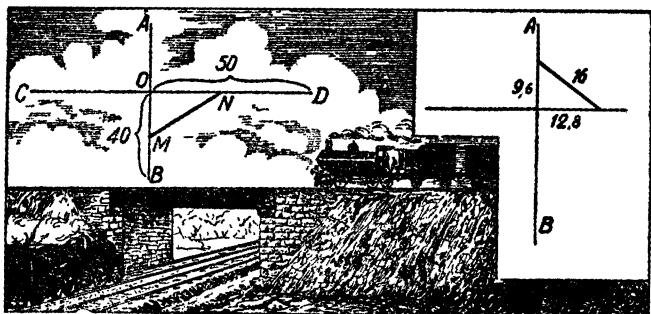


Рис. 20 и 21.

Решение

Эта и следующие задачи принадлежат к весьма интересному роду задач на разыскание наибольшего или наименьшего значения некоторой величины. Они могут быть решены различными приемами, один из которых мы сейчас покажем.

Начертим схему движения поездов нашей задачи. Пусть прямые AB и CD – скрещивающиеся пути (рис. 20). Станция B расположена в 40 км от точки скрещения O , станция D – в 50 км от нее. Предположим, что спустя x минут паровозы будут в кратчайшем взаимном расстоянии друг от друга $MN = m$. Поезд, вышедший из B , успел к этому моменту пройти путь $BM = 0,8x$, так как его минутная скорость равна $800 \text{ м} = 0,8 \text{ км}$. Следовательно, $OM = 40 - 0,8x$. Точно так же найдем, что $ON = 50 - 0,6x$. По теореме Пифагора

$$MN = m = \sqrt{OM^2 + ON^2} = \sqrt{(40 - 0,8x)^2 + (50 - 0,6x)^2}.$$

Возвысив в квадрат обе части уравнения

$$m = \sqrt{(40 - 0,8x)^2 + (50 - 0,6x)^2}.$$

и сделав упрощения, получаем

$$x^2 + 124x + 4\,100 - m^2 = 0.$$

Решив это уравнение относительно x , имеем

$$x = 62 \pm \sqrt{m^2 - 256}.$$

Так как x – число протекших минут – не может быть мнимым, то $m^2 - 256$ должно быть величиной положительной, или, в крайнем случае, равняться нулю. Последнее соответствует наименьшему значению m , и тогда

$$m^2 = 256, \quad \text{т. е. } m = 16.$$

Очевидно, что меньше 16-ти m быть не может, – иначе x становится мнимым. А если $m^2 - 256 = 0$, то $x = 62$.

Итак, паровозы окажутся всего ближе друг к другу через 62 мин., и взаимное их удаление тогда будет 16 км.

Определим, как они в этот момент расположены. Вычислим длину OM ; она равна

$$40 - 62 \times 0,8 = -9,6.$$

Знак минус означает, что паровоз пройдет за скрещении на 9,6 км. Расстояние же ON равно

$$50 - 62 \times 0,6 = 12,8,$$

т. е. второй паровоз не дойдет до скрещении на 12,8 км. Расположение паровозов показано на рис. 21. Как видим, оно вовсе не то, какое мы представляли себе до решения задачи. Уравнение оказалось достаточно терпимым и, несмотря на неправильную схему, дало правильное решение. Нетрудно понять, откуда эта терпи-

мость: она обусловлена алгебраическими правилами знаков.

ГДЕ УСТРОИТЬ ПОЛУСТАНОК?

Задача

В стороне от прямолинейного участка железнодорожного пути, в 20 км от него, лежит селение *B* (рис. 22). Где надо устроить полустанок *C*, чтобы проезд от *A* до *B* по железной дороге *AC* и по шоссе *CB* отнимал возможно меньше времени? Скорость движения по железной дороге 0,8 км в минуту, по шоссе – 0,2 км.

Решение

Обозначим расстояние *AD* (от *A* до основания перпендикуляра *BD* и *AD*) через *a*, *CD* через *x*. Тогда *AC* = *AD* – *CD* = *a* – *x*, а *CB* = $\sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{x^2 + 20^2}$. Время, в течение которого поезд проходит путь *AC*, равно

$$\frac{AC}{0,8} = \frac{a - x}{0,8}$$

Время прохождения пути *CB* по шоссе равно

$$\frac{CB}{0,2} = \frac{\sqrt{x^2 + 20^2}}{0,2}$$

А общая продолжительность переезда из *A* в *B* равна

$$\frac{a - x}{0,8} + \frac{\sqrt{x^2 + 20^2}}{0,2}$$

Эта сумма, которую обозначим через *m*, должна быть наименьшей.

Уравнение

$$\frac{a - x}{0,8} + \frac{\sqrt{x^2 + 20^2}}{0,2} = m$$

представляем в виде

$$-\frac{x}{0,8} + \frac{\sqrt{x^2 + 20^2}}{0,2} = m - \frac{a}{0,8}.$$

Умножим на 0,8, имеем

$$-x + 4\sqrt{x^2 + 20^2} = 0,8m - a$$

Обозначив $0,8m - a$ через k и освободив уравнение от радикала, получаем квадратное уравнение

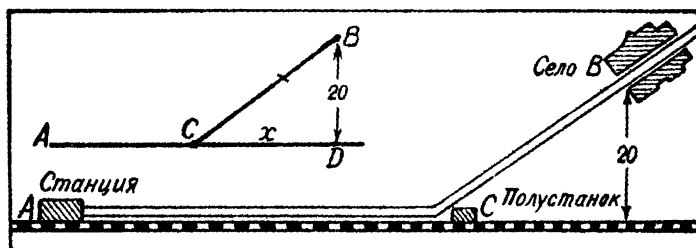


Рис. 22.

$$15x^2 - 2kx + 6\,400 - k^2 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{k \pm \sqrt{16k^2 - 96\,000}}{15}$$

Так как $k = 0,8m - a$, то при наименьшем значении m достигает наименьшей величины и k , и наоборот. Но, чтобы x было вещественным, $16k^2$ должно быть не меньше 96 000. Значит, наименьшая величина для $16k^2$ есть 96 000. Поэтому m становится наименьшим, когда

$$16k^2 = 96\,000$$

откуда

$$k = \sqrt{6\,000}.$$

и следовательно,

$$x = \frac{k \pm 0}{15} = \frac{\sqrt{6\,000}}{15} = 5,16.$$

Полустанок должен быть устроен приблизительно в 5 км от точки D , какова бы ни была длина $a = AD$.

Но, разумеется, наше решение имеет смысл только для случаев, когда $x < a$, так как, составляя уравнение, мы считали выражение $a - x$ за число положительное.

Если $x = a = 5,16$, то полустанок вообще строить не надо; придется ехать прямо на станцию. Так же нужно поступать и в случаях, когда расстояние a короче 5,16 км.

На этот раз мы оказываемся предусмотрительнее, нежели уравнение. Если бы мы слепо доверились уравнению, нам пришлось бы в рассматриваемом случае построить полустанок за станцией, – что было бы явной нелепостью: никто не минует станции, когда спешит попасть на поезд. Случай поучительный, показывающий, что при пользовании математическим оружием надо с должной осмотрительностью относиться к получаемым результатам: логика реальной действительности не всегда полностью совпадает с логикой того математического уравнения, в которое мы облачаем жизненные явления.

КАК ПРОВЕСТИ ШОССЕ?

Задача

Из приречного города A надо направлять грузы в пункт B , расположенный на a километров ниже по реке и в d километрах от берега (рис. 23). Как провести шоссе от B к реке, чтобы провоз грузов из A и B обходился возможно дешевле?

Провозная плата с тонно-километра по реке вдвое меньше чем по шоссе.

Решение

Обозначим расстояние AD через x , длину DB шоссе – через y , длину AC – через a , BC – через d .

Так как провоз по шоссе вдвое дороже, чем по реке, то сумма

$$x + 2y$$

должна быть, согласно требованию задачи, наимень-

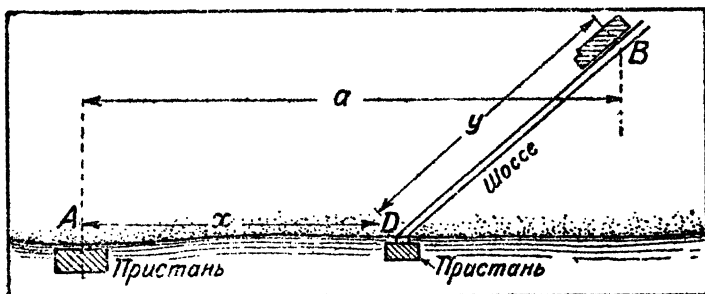


Рис. 23.

шая. Обозначим это наименьшее значение через m .
Имеем уравнение

$$x + 2y = m.$$

Но $x = a - DC$, а $DC = \sqrt{y^2 - d^2}$; наше уравнение получает вид:

$$a - \sqrt{y^2 - d^2} + 2y = m$$

или по освобождении от радикала,

$$3y^2 + 4(a - m)y + (a - m)^2 + d^2 = 0.$$

Решаем его:

$$y = -\frac{2}{3}(a - m) \pm \frac{\sqrt{(a - m)^2 - 3d^2}}{3}.$$

Чтобы y было вещественным, $(a - m)^2$ должно быть не меньше $3d^2$. Наименьшее значение $(a - m)^2$ равно $3d^2$, и тогда

$$m - a = d\sqrt{3}; \quad y = \frac{2(m - a) + 0}{3} = \frac{2d\sqrt{3}}{3}$$

$\sin BDC = d : y$, т. е.

$$d : \frac{2d\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Но угол, синус которого равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$, заключает 60° .

Значит, шоссе надо провести под углом в 60° к реке, – каково бы ни было расстояние AC .

Здесь наталкиваемся снова на ту же особенность, с которой мы встретились в предыдущей задаче. Решение имеет смысл только при определенном условии. Если пункт расположен так, что шоссе, проведенное под углом в 60° к реке, пройдет по ту сторону города A , то решение неприложимо; в таком случае надо непосредственно связать пункт B с городом A шоссе, во все не пользуясь рекой для перевозки.

КОГДА ПРОИЗВЕДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕЕ?

Для решения многих задач «на максимум и минимум», т. е. на разыскание наибольшего и наименьшего значений переменной величины, можно успешно пользоваться одной алгебраической теоремой, с которой мы сейчас познакомимся. Рассмотрим задачу:

На какие две части надо разбить данное число, чтобы произведение их было наибольшее?

Решение

Пусть данное число a и одна из частей, на которые мы разбили наше число, есть x . Произведение обеих частей обозначим через m :

$$x(a - x) = m.$$

Чтобы определить, при каком значении x величина m наибольшая, решим это уравнение относительно x

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4m}}{2}.$$

Наибольшая величина $4m$ есть a^2 , т. е.

$$4m = a^2; \text{ тогда } m = \frac{a^2}{4} \quad \text{и } x = \frac{a}{2}$$

Итак, число надо разделить пополам: произведение двух чисел, сумма которых неизменна, будет наибольшим тогда, когда эти числа равны между собой.

Рассмотрим тот же вопрос для трех чисел.

На какие три части надо разбить данное число, чтобы произведение их было наибольшее?

Решение

При решении этой задачи будем опираться на предыдущую. Пусть три части, на которые разбито данное число, — x, y, z ; само же число обозначим через a . Имеем

$$x + y + z = a.$$

Допустим, что x и y не равны между собой. Если каждое из них заменим их полусуммой $\frac{x+y}{2}$, то сумма трех множителей не изменится.

$$\frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2} + z = x + y + z = a.$$

Но мы уже знаем, что произведение равных множителей, при неизменной сумме, больше произведения неравных, т. е.

$$\frac{x+y}{2} \times \frac{x+y}{2} > xy.$$

Поэтому

$$\frac{x+y}{2} \times \frac{x+y}{2} \times z > xyz.$$

Вообще, если среди множителей xyz есть хотя бы два неравных, то можно подобрать числа, которые, не меняя общей суммы, дадут произведение большее, чем xyz . И только при равенстве множителей произвести такой замены нельзя: произведение трех равных множителей, при неизменной сумме, наибольшее.

Подобным же образом можно доказать эту теорему и для четырех множителей, для пяти и т. д. Рассмотрим теперь более общий случай.

Найти, при каких значениях x и y выражение $x^p y^q$ наибольшее, если $x + y = a$.

Решение

Надо найти, при каком значении x выражение

$$x^p (a - x)^q$$

достигает наибольшей величины.

Умножим это выражение на число $\frac{1}{p^p q^q}$. Получим новое выражение

$$\frac{x^p}{p^p} \frac{(a - x)^q}{q^q},$$

которое, очевидно, достигает наибольшей величины тогда же, когда и первоначальное.

Представим сейчас полученное выражение в виде:

$$\underbrace{\frac{x}{p} \times \frac{x}{p} \times \frac{x}{p} \times \frac{x}{p} \times \dots \times \frac{a-x}{q} \times \frac{a-x}{q} \times \frac{a-x}{q} \times \dots}_{p \text{ раз}} \quad \underbrace{\phantom{\frac{x}{p} \times \frac{x}{p} \times \frac{x}{p} \times \frac{x}{p} \times \dots \times \frac{a-x}{q} \times \frac{a-x}{q} \times \frac{a-x}{q} \times \dots}}_{q \text{ раз}}$$

Сумма всех множителей этого выражения равна

$$\underbrace{\frac{x}{p} + \frac{x}{p} + \frac{x}{p} + \dots + \frac{a-x}{q} + \frac{a-x}{q} + \frac{a-x}{q} + \dots}_{p \text{ раз}} \quad \underbrace{\phantom{\frac{x}{p} + \frac{x}{p} + \frac{x}{p} + \dots + \frac{a-x}{q} + \frac{a-x}{q} + \frac{a-x}{q} + \dots}}_{q \text{ раз}}$$

$$= \frac{px}{p} + \frac{q(a-x)}{q} = x + a - x = a$$

т. е. величине постоянной.

На основании ранее доказанного (стр. 179) заключаем, что произведение

$$\frac{x}{p} \times \frac{x}{p} \times \frac{x}{p} \times \dots \times \frac{a-x}{q} \times \frac{a-x}{q} \times \frac{a-x}{q} \times \dots$$

достигает максимума при равенстве всех его отдельных множителей, т. е. когда

$$\frac{x}{p} = \frac{a-x}{q}.$$

Зная, что $a - x = y$, получаем, переставив члены, пропорцию

$$\frac{x}{y} = \frac{p}{q}.$$

Итак, произведение $x^p y^q$ при постоянстве суммы $x + y$ достигает наибольшей величины тогда, когда

$$x : y = p : q.$$

Таким же образом можно доказать, что произведение

$$x^p y^q z^r, x^p y^q z^r t^u \text{ и т. п.}$$

при постоянстве сумм $x + y + z$, $x + y + z + t$ и т. д. достигают наибольшей величины тогда, когда

$$x : y : z = p : q : r, \quad x : y : z : t = p : q : r : u \text{ и т. д.}$$

КОГДА СУММА НАИМЕНЬШАЯ?

Читатель, желающий испытать свои силы на доказательстве полезных алгебраических теорем, пусть докажет сам следующие положения:

1. Сумма двух чисел, произведение которых неизменно, становится наименьшей, когда эти числа равны.

Например, для произведения 36: $4 + 9 = 13$; $3 + 12 = 15$; $2 + 18 = 20$; $1 + 36 = 37$; и наконец $6 + 6 = 12$.

2. Сумма нескольких чисел, произведение которых неизменно, становится наименьшей, когда эти числа равны.

Например, для произведения 216: $3 + 12 + 6 = 21$; $2 + 18 + 6 = 24$; $9 + 6 + 4 = 19$, между тем как $6 + 6 + 6 = 18$.

* * *

На ряде примеров покажем, как применяются на практике эти теоремы.

БРУС НАИБОЛЬШЕГО ОБЪЕМА

Задача

Из цилиндрического бревна надо выпилить прямоугольный брус наибольшего объема. Какой формы должно быть его сечение (рис. 24)?

Решение

Если стороны прямоугольного сечения x и y , то по теореме Пифагора

$$x^2 + y^2 = d^2$$

где d – диаметр бревна. Объем бруса наибольший, когда площадь его сечения наибольшая, т. е. когда xy



Рис. 24.

достигает наибольшей величины. Но если xy наибольшая, то наибольшим будет и произведение x^2y^2 . Так как сумма $x^2 + y^2$ неизменна, то произведение x^2y^2 наибольшее, когда $x^2 = y^2$, или $x = y$.

Итак, сечение бруса должно быть квадратное.

ДВА ЗЕМЕЛЬНЫХ УЧАСТКА

Задачи

1. Какой формы должен быть прямоугольный участок данной площади, чтобы длина ограничивающей его изгороди была наименьшая?
2. Какой формы должен быть прямоугольный участок, чтобы при данной длине изгороди площадь его была наибольшая?

Решения

1. Форма прямоугольного участка определяется соотношением его сторон x и y . Площадь участка со сто-

ронами x и y равна xy , а длина изгороди $2x + 2y$. Длина изгороди будет наименьшей, если $x + y$ достигнет наименьшей величины.

При постоянном произведении xy сумма $x + y$ наименьшая в случае равенства $x = y$. Следовательно, искомым прямоугольник – квадрат.

2. Если стороны прямоугольника x и y , то длина изгороди $2x + 2y$, а площадь xy . Это произведение будет наибольшим тогда же, когда и произведение $4xy$, т. е. $2x \times 2y$; последнее же произведение при постоянной сумме его множителей $(2x + 2y)$ становится наибольшим при $2x = 2y$, т. е. когда участок имеет форму квадрата.

К известным нам из геометрии свойствам квадрата мы можем, следовательно, прибавить еще следующее: из всех прямоугольников он обладает наименьшим периметром при данной площади и наибольшей площадью при данном периметре.

БУМАЖНЫЙ ЗМЕЙ

Задача

Змею, имеющему вид сектора, желают придать такой фасон, чтобы он вмещал в данном периметре наибольшую площадь. Какова должна быть форма сектора?

Решение

Уточняя требование задачи, мы должны разыскать, при каком соотношении длины дуги сектора и его радиуса площадь его достигает наибольшей величины при данном периметре.

Если радиус сектора x , а дуга y , то его периметр l и площадь S выразятся так (рис. 25):

$$l = 2x + y; \quad S = \frac{xy}{2} = \frac{x(l - 2x)}{2}.$$

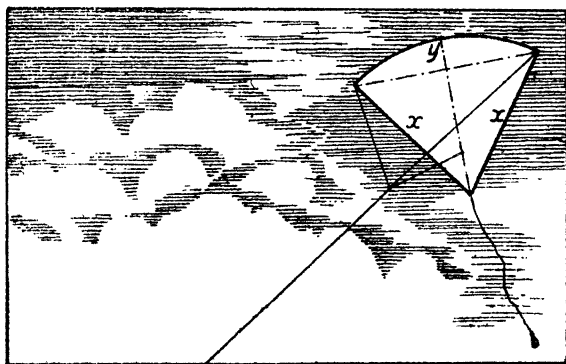


Рис. 25.

Величина S достигает максимума при том же значении x , как и произведение $2x(l - 2x)$, т. е. учетверенная площадь. Так как сумма множителей $2x + (l - 2x) = l$, т. е. величина постоянная, то произведение их наибольшее когда $2x = l - 2x$, откуда

$$x = \frac{l}{4}; \quad y = l - 2 \times \frac{l}{4} = \frac{l}{2}.$$

Итак, сектор при данном периметре замыкает наибольшую площадь в том случае, когда его радиус составляет половину дуги (т. е. длина его дуги равна сумме радиусов, или длина кривой части его периметра равна длине прямолинейной). Угол сектора равен 115° – двум радианам. Каковы летные качества такого широкого змея, – вопрос другой, рассмотрение которого в нашу задачу не входит.

ПОСТРОЙКА ДОМА

Задача

На месте разрушенного дома, от которого уцелела одна стена, желают построить новый. Длина уцелевшей

стены – 12 м. Площадь нового дома должна равняться 112 кв. м. Хозяйственные условия работы таковы:

1) ремонт погонного метра стены обходится в 25% стоимости кладки новой;

2) разбор погонного метра старой стены и кладка из полученного материала новой стены стоит 50% того, во что обходится постройка погонного метра стены из нового материала.

Как при таких условиях наивыгоднейшим образом использовать уцелевшую стену?

Решение

Пусть от прежней стены сохраняется x метров, а остальные $12 - x$ метров разбираются, чтобы из полученного материала возвести заново часть стены нового дома (рис. 26). Если стоимость кладки погонного метра стены из нового материала равна a , то ремонт x метров

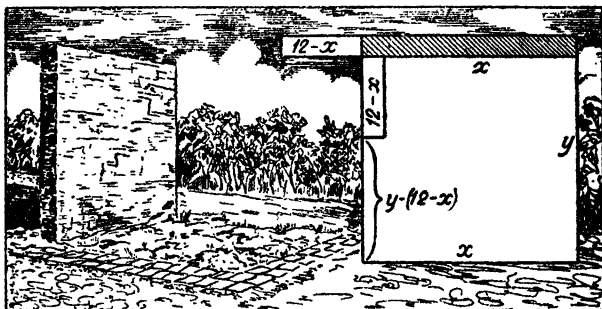


Рис. 26.

старой стены будет стоить $\frac{ax}{4}$; возведение участка длиной $12 - x$ обойдется $\frac{a(12 - x)}{2}$; прочей части этой сте-

ны $a[y - (12 - x)]$, т. е. $a(y + x - 12)$; третьей стены ax , четвертой ay . Вся работа обойдется

$$\frac{ax}{4} + \frac{a(12 - x)}{2} + a(y + x - 12) + ax + ay = \frac{a(7x + 8y)}{4} - 6a.$$

Последнее выражение достигает наименьшей величины тогда же, когда и сумма

$$7ax + 8ay.$$

Мы знаем, что площадь дома xy равна 112; следовательно,

$$7ax \times 8ay = 112 \times 56a^2,$$

При постоянном произведении сумма $7ax + 8ay$ достигает наименьшей величины тогда, когда

$$7ax = 8ay,$$

откуда

$$y = \frac{7}{8} x.$$

Подставив это выражение для y в уравнение

$$xy = 112,$$

имеем

$$\frac{7}{8} x^2 = 112, \quad x = \sqrt{128} = 11,3.$$

А так как длина старой стены 12 м, то подлежит разборке только 0,7 м этой стены.

ЖЕЛОБ НАИБОЛЬШЕГО СЕЧЕНИЯ

Задача

Прямоугольный металлический лист (рис. 27) надо согнуть желобом с сечением в форме равнобокой трапеции. Это можно сделать различными способами, как видно из рис. 28. Какой ширины должны быть боковые

полосы, и под каким углом они должны быть отогнуты, чтобы сечение желоба имело наибольшую площадь (рис. 29)?

Решение

Пусть ширина листа l . Ширину отгибаемых боковых полос обозначим через x , а ширину дна желоба через y . Введем еще одно неизвестное z , значение которого ясно из рис. 29.

Площадь S трапеции, представляющей сечение желоба равна

$$S = \frac{(z + y + z) + y}{2} \sqrt{x^2 - z^2} = \sqrt{(y + z)^2 (x^2 - z^2)}.$$

Задача свелась к определению тех значений x, y, z , при которых величина S достигает наибольшей величины; при этом сумма $2x + y$ (т. е. ширина листа) сохраняет постоянную величину l . Делаем преобразования:

$$S^2 = (y + z)^2 (x + z) (x - z).$$

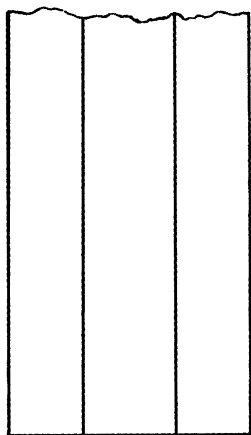


Рис. 27.

S^2 становится наибольшим при тех же значениях x, y, z , как и $3S^2$, последнее же достигает максимума одновременно с выражением

$$(y + z) (y + z) (x + z) (3x - 3z).$$

Сумма этих четырех множителей

$$\begin{aligned} y + z + y + z + x + z + 3x - 3z &= \\ &= 2y + 4x = 2l, \end{aligned}$$

т. е. неизменна. Поэтому произведение наших четырех множителей максимально, когда

они равны между собой, т. е.

$$y + z = x + z \quad y + z = 3x - 3z.$$

Из первого уравнения имеем

$$y = x,$$

а так как $y + 2x = l$, то

$$x = y = \frac{l}{3}.$$

Из второго уравнения находим

$$z = \frac{x}{2} = \frac{l}{6}.$$

Далее, так как катет z равен половине гипотенузы x (рис. 29), то противолежащий этому катету угол равен 30° , а угол наклона боков желоба ко дну равен

$$90 + 30 = 120^\circ.$$

Итак, желоб будет иметь наибольшее сечение, когда грани его согнуты в форме трех смежных сторон правильного шестиугольника.

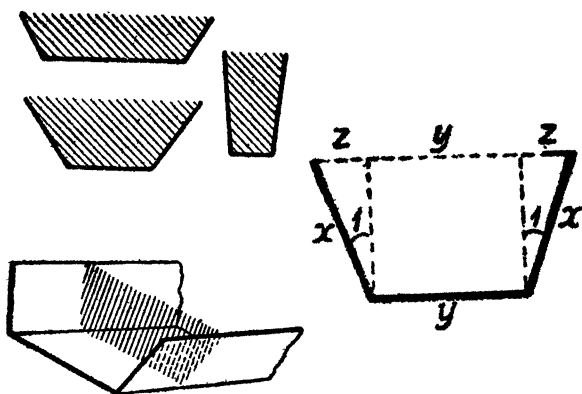


Рис. 28 и 29.

ВОРОНКА НАИБОЛЬШЕЙ ВМЕСТИМОСТИ

Задача

Из жестяного круга нужно изготовить коническую часть воронки. Для этого в круге вырезают сектор и остальную часть круга свертывают конусом (рис. 30). Сколько градусов должно быть в дуге сектора, чтобы конус получился наибольшей вместимости?

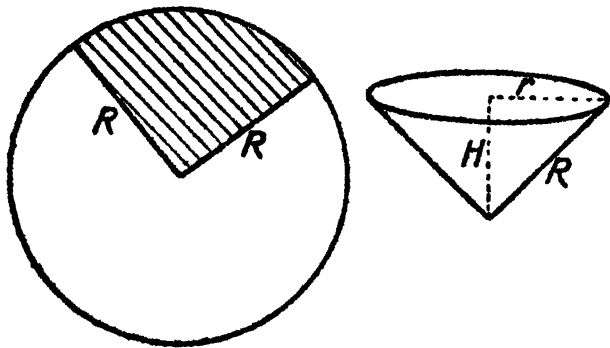


Рис. 30.

Решение

Длину дуги той части круга, которая свертывается в конус, обозначим через x (в линейных мерах). Следовательно, образующей конуса будет радиус R жестяного круга, а окружность основания будет равна x . Радиус r основания конуса определяем из равенства

$$2\pi r = x; \quad r = \frac{x}{2\pi}.$$

Высота H конуса равна (по теореме Пифагора) (рис. 30)

$$H = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}};$$

Объем V этого конуса равен

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 H = \frac{\pi}{3} \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}.$$

Это выражение достигает наибольшей величины одновременно с выражением

$$\left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 \sqrt{R^2 - \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2}$$

и его квадратом

$$\left(\frac{x}{2\pi} \right)^4 \left[R^2 - \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 \right].$$

Так как

$$\left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 + R^2 - \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 = R^2$$

есть величина постоянная, то (на основании доказанного на стр. 178) последнее произведение имеет максимум при том значении x , когда

$$\left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 : \left[R^2 - \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 \right] = 2 : 1,$$

откуда

$$\left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 = 2R^2 - 2 \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2,$$

$$3 \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 = 2R^2 \quad \text{и} \quad x = \frac{2\pi}{3} R\sqrt{6} = 5,14R.$$

В градусах дуга $x = 294^\circ$ и, значит, дуга вырезаемого сектора должна содержать 66° .

САМОЕ ЯРКОЕ ОСВЕЩЕНИЕ

Задача

На какой высоте над столом должно находиться пламя свечи, чтобы всего ярче освещать лежащую на столе монету?

Решение

Может показаться, что для достижения наилучшего освещения надо поместить пламя возможно ниже.

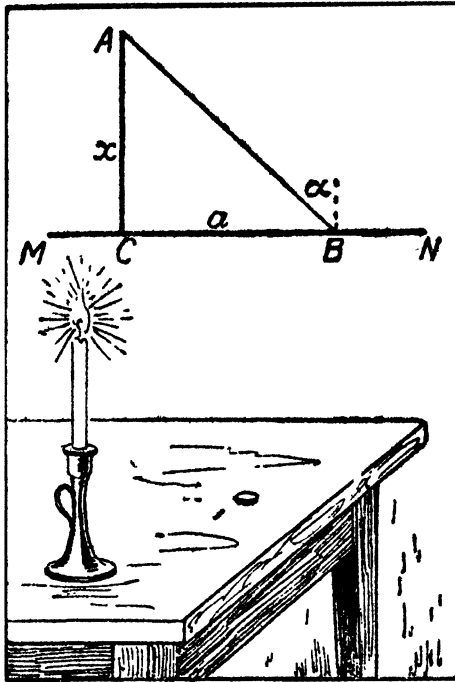


Рис. 31.

Это неверно: при низком положении пламени лучи падают очень отлого. Поднять свечу так, чтобы лучи падали круто, — значит удалить источник света. Наиболее выгодна в смысле освещения, очевидно, некоторая средняя высота пламени над столом. Обозначим ее через x (рис. 31). Расстояние BC монеты B от основания C перпендикуляра, проходящего через пламя A , обозначим через a . Если яркость пламени i , то освещенность монеты, согласно законам оптики, выразится так:

$$\frac{i}{AB^2} \cos \alpha = \frac{i \cos \alpha}{(\sqrt{a^2 + x^2})^2} = \frac{i \cos \alpha}{a^2 + x^2},$$

где α – угол падения пучка лучей AB , Так как

$$\cos \alpha = \cos A = \frac{x}{AB} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

то освещенность равна .

$$\frac{i}{a^2 + x^2} \times \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{ix}{(a^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Это выражение достигает максимума при том же значении x , как и его квадрат, т. е.

$$\frac{i^2 x^2}{(a^2 + x^2)^3}$$

Множитель i^2 , как величину постоянную, опускаем, а остальную часть исследуемого выражения преобразуем так:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{(a^2 + x^2)^3} &= \frac{1}{(a^2 + x^2)^2} \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + a^2} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{x^2 + a^2} \right)^2 \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + a^2} \right), \end{aligned}$$

потому что

$$1 - \frac{a^2}{x^2 + a^2} = \frac{x^2}{x^2 + a^2}.$$

Преобразованное выражение достигает максимума одновременно с выражением

$$\left(\frac{a^2}{x^2 + a^2} \right)^2 \times \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + a^2} \right),$$

так как введенный постоянный множитель a^2 не влияет на то значение x , при котором произведение дости-

гает максимума. Замечая, что сумма первых степеней этих множителей

$$\frac{a^2}{x^2 + a^2} + 1 - \frac{a^2}{x^2 + a^2} = 1,$$

т. е, величина постоянная, заключаем, что рассматриваемое произведение становится наибольшим, когда

$$\frac{a^2}{x^2 + a^2} : \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + a^2} \right) = 2 : 1.$$

Имеем уравнение

$$a^2 = 2x^2 + 2a^2 - 2a^2.$$

Решив это уравнение, находим:

$$x^2 = \frac{a}{\sqrt{2}} = 0,71a.$$

Монета освещается всего ярче, когда источник света находится на высоте 0,71 расстояния от проекции источника до монеты.

Знание этого соотношения помогает при устройстве наилучшего освещения рабочего места.



Глава седьмая

ПРОГРЕССИИ

ДРЕВНЕЙШАЯ ПРОГРЕССИЯ

Задача

Древнейшая задача на прогрессии – не вопрос о вознаграждении изобретателя шахмат, насчитывающий за собою двухтысячелетнюю давность, а гораздо более старая задача о делении хлеба, которая записана в знаменитом египетском папирусе Ринда. Папирус этот, разысканный Риндом полвека назад, составлен около 2 000 лет до нашей эры и является списком с другого, еще более древнего математического сочинения, относящегося, быть может, к третьему тысячелетию до нашей эры. В числе арифметических, алгебраических и геометрических задач этого документа имеется такая (приводим ее в вольной передаче):

Сто мер хлеба разделить между пятью людьми так, чтобы второй получил на столько же больше первого, на сколько третий получил больше второго, четвертый больше третьего и пятый больше четвертого. Кроме того, двое первых должны получить в 7 раз меньше трех остальных. Сколько нужно дать каждому?

Решение

Очевидно, количества хлеба, полученные участниками раздела, составляют возрастающую арифметическую прогрессию. Пусть первый ее член x , разность y . Тогда

доля первого	x
« второго	$x + y$
« третьего	$x + 2y$
« четвертого	$x + 3y$
« пятого	$x + 4y$

На основании условий задачи составляем следующие два уравнения:

$$\begin{cases} x + (x + y) + (x + 2y) + (x + 3y) + (x + 4y) = 100 \\ 7[x + (x + y)] = (x + 2y) + (x + 3y) + (x + 4y). \end{cases}$$

После упрощений первое уравнение получает вид:

$$x + 2y = 20,$$

а второе:

$$11x = 2y.$$

Решив эту систему, имеем

$$x = 1 \frac{2}{3}; \quad y = 9 \frac{1}{6}.$$

Значит, хлеб должен быть разделен на следующие части:

$$1 \frac{2}{3}; \quad 10 \frac{5}{6}; \quad 20; \quad 29 \frac{1}{6}; \quad 38 \frac{1}{3}.$$

АЛГЕБРА НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ

Несмотря на пятидесятивековую древность этой задачи на прогрессии, в нашем школьном обиходе прогрессии появились сравнительно недавно. В учебнике Магницкого, изданном двести лет назад и служившем целых полвека основным руководством для школьного

обучения, прогрессии хотя и имеются, но общих формул, связывающих входящие в них величины между собою, в нем не дано. Сам составитель учебника не без затруднений справлялся поэтому с такими задачами.

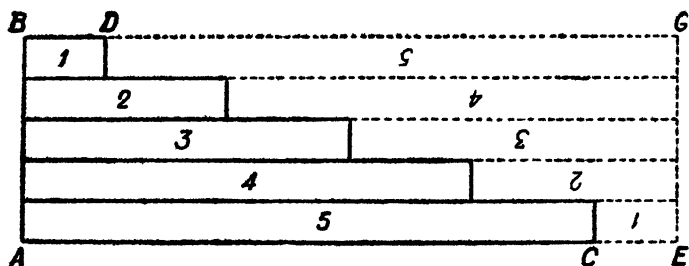


Рис. 32.

Между тем, формулу суммы членов арифметической прогрессии легко вывести простым и наглядным приемом с помощью клетчатой бумаги. На такой бумаге любая арифметическая прогрессия изображается ступенчатой фигурой. Например, фигура ABC на рис. 32 изображает прогрессию:

2; 5; 8; 11; 14.

Чтобы определить сумму ее членов, дополним чертеж до прямоугольника $ABGE$. Получим две равные фигуры $ABDC$ и $DGEC$. Площадь каждой из них изображает сумму членов нашей прогрессии. Значит, двойная сумма прогрессии равна площади прямоугольника $ABGE$, т. е.

$$(AC + CE) \times AB.$$

Но $AC + CE$ изображает сумму 1-го и 5-го членов прогрессии; AB – число членов прогрессии. Поэтому двойная сумма

$$2S = (\text{сумма крайних членов}) \times (\text{число членов})$$

или

$$S = \frac{(\text{первый} + \text{последний член}) \times (\text{число членов})}{2}.$$

ПОЛИВКА ОГОРОДА

Задача

В огороде 30 грядок, каждая длиною 16 м и шириною 2,5 м. Поливая грядки, огородник приносит ведра с водою из колодца, расположенного в 14 м от края огорода (рис. 33), и обходит грядки по меже, причем воды, приносимой за один раз, достаточно для поливки только одной грядки.

Какой длины путь должен пройти огородник, поливая весь огород? Путь начинается и кончается у колодца.

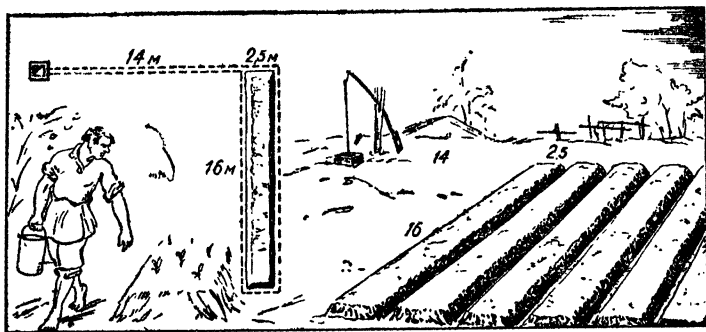


Рис. 33.

Решение

Для поливки первой грядки огородник должен пройти путь

$$14 + 16 + 2,5 + 16 + 2,5 + 14 = 65 \text{ м.}$$

При поливке второй он проходит

$$14 + 2,5 + 16 + 2,5 + 16 + 2,5 + 2,5 + 14 = 65 + 5 = 70 \text{ м,}$$

Каждая следующая грядка требует пути на 5 м длиннее предыдущей. Имеем прогрессию:

$$65; 70; 75; \dots; 65 + 5 \times 29.$$

Сумма ее членов равна

$$\frac{(65 + 65 + 29 \times 5) \times 30}{2} = 4\,125 \text{ м.}$$

Огородник при поливке всего огорода проходит путь в 4,125 км,

КУРИНОЕ СТАДО

Задача

Для прокормления стада из 31 курицы запасено некоторое количество корма из расчета по декалитру в неделю на каждую курицу. При этом предполагалось, что численность стада меняться не будет. Но так как в действительности число куриц каждую неделю убывало на 1, то заготовленного корма хватило на двойной срок.

Как велик был запас корма и на сколько времени был он первоначально рассчитан?

Решение

Пусть запасено было x декалитров корма на y недель. Так как корм рассчитан на 31 курицу по 1 декалитру на курицу в неделю, то

$$x = 31y.$$

В первую неделю израсходовано было 31 дл, во вторую 30, в третью 29 и т. д. до последней недели всего удвоенного срока, когда израсходовано было:

$$(31 - 2y + 1) \text{ дл}^1.$$

Весь запас составлял, следовательно:

$$x = 31y = 31 + 30 + 29 + \dots + (31 - 2y + 1).$$

Сумма $2y$ членов прогрессии, первый член которой 31, а последний $31 - 2y + 1$, равна

$$31y = \frac{(31 + 31 - 2y + 1) 2y}{2} = (62 - 2y + 1) y.$$

Так как y не может быть равен нулю, то мы вправе обе части равенства сократить на этот множитель. Получаем

$$31 = 62 - 2y + 1 \quad \text{и} \quad y = 16,$$

откуда

$$x = 31y = 496.$$

Запасено было 496 декалитров корма на 16 недель.

АРТЕЛЬ ЗЕМЛЕКОПОВ

Задача

Артель землекопов подрядилась вырыть канаву. Если бы она работала в полном составе, канава была бы вырыта в 24 часа. Но в действительности к рабо-

¹ Поясним: расход корма в течение

1-й недели 31 дл,

2-й « 31 — 1 дл,

3-й « 31 — 2 дл,

$2y$ -й « 31 ($2y - 1$) = ($31 - 2y + 1$) дл.

те приступил сначала только один землекоп. Спустя некоторое время присоединился второй; еще через столько же времени – третий, за ним через такой же промежуток четвертый и так до последнего. При расчете оказалось, что первый работал в 11 раз дольше последнего.

Сколько времени работал последний?

Решение

Пусть последний землекоп работал x часов, тогда первый работал $11x$ часов. Далее, если число членов артели y , то общее число часов работы определится как сумма y членов убывающей прогрессии, первый член которой $11x$, а последний x , т. е.

$$\frac{(11x + x)y}{2} = 6xy.$$

С другой стороны, известно, что артель из y человек, работая в полном составе, выкопала бы канаву в 24 часа, – т. е. что для выполнения работы необходимо $24y$ рабочих часов. Следовательно, $6xy = 24y$.

Число y не может равняться нулю; на этот множитель можно поэтому уравнение сократить:

$$6x = 24 \quad \text{и} \quad x = 4.$$

Итак, землекоп, приступивший к работе последним, работал 4 часа.

Мы ответили на вопрос задачи; но если бы мы любопытствовали узнать, сколько рабочих входило в артель, то не могли бы этого определить, – несмотря на то, что в уравнении число это фигурировало (под буквою y). Для решения этого вопроса в задаче не приведено достаточных данных.

ЯБЛОКИ

Задача

Садовник продал первому покупателю половину всех своих яблок и еще пол яблока; второму покупателю – половину оставшихся и еще пол-яблока; третьему – половину оставшихся и еще пол-яблока и т. д. Седьмому покупателю он продал половину оставшихся яблок и еще пол-яблока; после этого яблок у него не осталось. Сколько яблок было у садовника?

Решение

Если первоначальное число яблок x , то первый покупатель получил

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2};$$

второй:

$$\frac{1}{2} \left(x - \frac{x+1}{2} \right) + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2^2};$$

третий:

$$\frac{1}{2} \left(x - \frac{x+1}{2} - \frac{x+1}{4} \right) + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2^3};$$

7-й покупатель

$$\frac{x+1}{2^7}.$$

Имеем уравнение:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2^2} + \frac{x+1}{2^3} + \dots + \frac{x+1}{2^7} = x$$

или

$$(x+1) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^7} \right) = x.$$

откуда

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{2^7}, \quad \text{и} \quad x = 2^7 - 1 = 127.$$

Всех яблок было 127.

НОВОСТЬ

Задача

Некто, узнав в 10 час. утра важную новость, рассказал о ней в течение ближайшего часа 4 товарищам. Каждый из них в течение ближайшего часа сообщил о ней четверым другим; каждый из вновь узнавших в те-



чение часа успел поделиться известием с четырьмя знакомыми. Сколько человек может быть осведомлено таким путем к 7 часам вечера?

Решение

Задача сводится к нахождению суммы 10 членов геометрической прогрессии:

$$1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^9 = \frac{4^{10} - 1}{4 - 1} = \frac{2^{20} - 1}{3}.$$

Последнее выражение можно вычислить приближенно, принимая $2^{10} = 1024 \approx 1\,000$

$$\frac{2^{20} - 1}{3} \approx \frac{10^6 - 1}{3},$$

т. е. около трети миллиона. Все население большого города может быть таким образом осведомлено о новости в течение одного дня.

Поразительнее другой расчет в том же роде: если бы новость передавалась так, что каждый, узнавший ее, сообщал ее в течение четверти часа двоим другим, то все человечество было бы осведомлено в $7\frac{1}{2}$ часов.

ПРОГРЕССИЯ РАЗМНОЖЕНИЯ

Многочисленные примеры геометрических прогрессий постоянно дает нам сама окружающая нас природа, потому что размножение во всем органическом

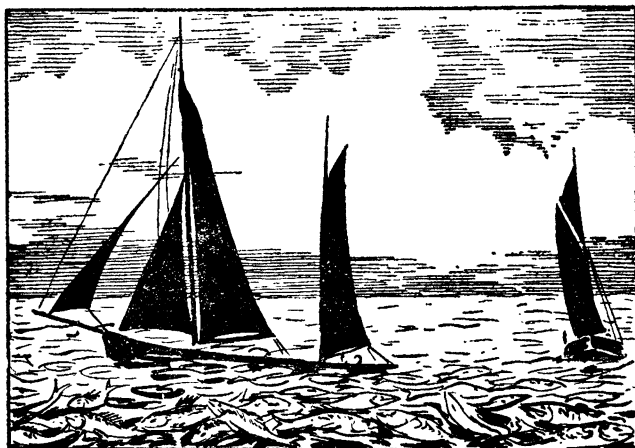


Рис. 34. Если бы выживали все появляющиеся на свет рыбы, то потомство одной пары в 10 лет сплошь заполнило бы все океаны.

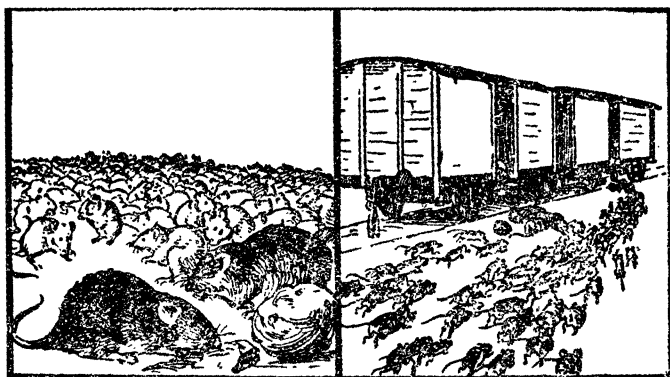


Рис. 35. Потомство одной пары крыс в год доходит до 860.

мире совершается именно по такому закону. Этот факт является одним из камней в фундаменте учения Дарвина. Вот что писал об этом великий натуралист (в «Происхождении видов»):

«Борьба за существование неизбежно вытекает из быстрой прогрессии, в какой стремятся к размножению все органические существа. Каждое существо, в течение своей жизни производящее несколько яиц или семян, неминуемо должно подвергаться истреблению в каком-нибудь возрасте, в какой-нибудь период года или, наконец, в какие-нибудь случайные годы – иначе, в силу геометрической прогрессии размножения, численность его достигла бы таких размеров, что ни одна страна в мире не могла бы прокормить или вместить его потомства. Отсюда – так как производится больше особей, чем может выжить, – должна во всех случаях возникать борьба между особями одного вида, либо между особями различных видов, либо же с физическими условиями жизни. Если, быть может, некоторые виды в настоящее время и разрастаются более или ме-

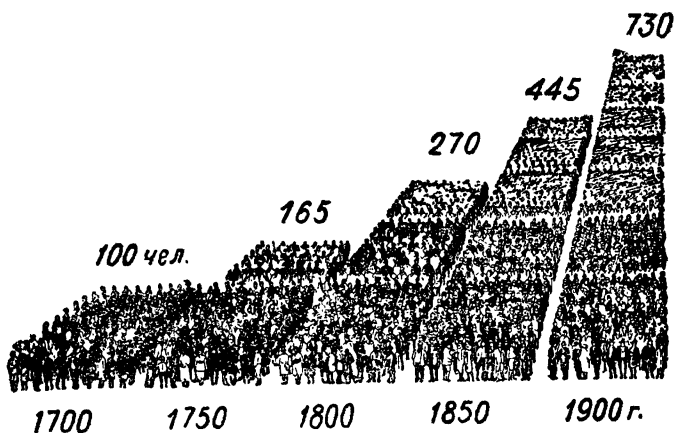


Рис. 36. Прогрессия размножения человека.

нее быстро, – то все виды такого явления представлять не могут, так как Земля не вместила бы их.

Не существует ни одного исключения из правила, по которому любое органическое существо естественно размножается в такой прогрессии, что, не подвергаясь оно истреблению, потомство одной пары покрыло бы всю землю. Даже медленно размножающийся человек в 25 лет удваивается в числе, и при такой прогрессии без малого через 1 000 лет для его потомства не достало бы места, где стоять. Линней вычислил, что если бы какое-нибудь однолетнее растение производило по два семени (а растений с такой слабой производительностью не существует), то через 20 лет его потомство возросло бы до миллиона. Слон плодится медленнее всех известных животных, и я вычислил минимальные размеры его размножения. Он начинает плодиться не ранее 30-летнего возраста и до 90 лет приносит не более 6 детенышей, живет же до 100; допустив эти числа, получим, что в период 740–750 лет от одной пары получилось бы 19 млн.

Но мы имеем свидетельства более убедительные, чем эти теоретические соображения, – именно, случаи поразительно быстрого размножения некоторых животных в природном состоянии, когда условия почему-либо им благоприятствуют в течение ряда лет. Еще поразительнее факты, касающиеся одичания домашних животных в различных странах; если бы указания на быстрое размножение столь медленно плодящегося рогатого скота и лошадей в Южной Америке и Австралии не опирались на самые достоверные свидетельства, они представлялись бы просто невероятными.

То же и с растениями; можно было бы привести примеры растений, сделавшихся совершенно обыкновенными на протяжении целых островов в период менее 10 лет после того, как они были ввезены. Геометрическая прогрессия их размножения, результаты которой всегда нас поражают, весьма просто объясняет быстрое возрастание их численности и широкое расселение в новом отечестве.



Мы с уверенностью можем утверждать, что все животные и растения стремятся размножиться в геометрической прогрессии, что они переполнили бы все места, в которых только могли бы ужиться, и что

стремление к размножению в геометрической прогрессии должно удерживаться в границах только истреблением в каком-нибудь периоде жизни».

Проверку приведенных в этом отрывке расчетов предоставляю читателю проделать самостоятельно – по образцу тех вычислений, которые выполняются в ряде следующих примеров.

РАЗВЕДЕНИЕ КРОЛИКОВ

Задача

Кролик – одно из наиболее быстро размножающихся млекопитающих. Самка в течение года рождает 7 раз, принося каждый раз до 8 детенышей, которые в течение одного года вырастают настолько, что становятся в свою очередь способны к размножению. Вычислите примерную численность потомства одной пары кроликов после 10 лет беспрепятственного размножения.

Решение

Так как расчет требуется только приблизительный, то для облегчения вычислений будем округлять числа. Примем, что самка кролика в течение года приносит около 50 детенышей, среди которых 25 самок. Тогда численность потомства в последовательные годы будет составлять по истечении

1 года 50

2 лет $50 + 25 \times 50$

3 лет $50 + 25 \times 50 + 25 \times 25 \times 50 = 50 + 50 \times 25 + 50 \times 25^2$

.....

10 лет $50 + 50 \times 25 + 50 \times 25^2 + \dots + 50 \times 25^9$

Последний, ряд чисел представляет геометрическую прогрессию с знаменателем 25. Сумма ее 10 членов равна

$$\frac{50 \times 25^9 \times 25 - 50}{25 - 1} \approx 2 \times 25^{10}.$$

Приближенное вычисление этой степени можно выполнить без логарифмов следующим образом:

$$25^{10} = \left(\frac{100}{4}\right)^{10} = \left(\frac{10}{2}\right)^{20} = \frac{10^{20}}{2^{20}} = \frac{10^{20}}{2^{10} \times 2^{10}}.$$

Но $2^{10} = 1\,024 \approx 1\,000$, или 10^3 ; поэтому

$$2 \times 25^{10} \approx \frac{2 \times 10^{20}}{10^3 \times 10^3} = 200 \times 10^{12}.$$

или двести миллиардов. Вспомним, что число квадратных метров поверхности всей суши почти вдвое меньше этого: 125 миллиардов!

При разведении кроликов значительная часть их потребляется с хозяйственной целью. Предположим, что потребляется 80% приплода, и рассчитаем, какое при таком условии накопится стадо по истечении 10 лет.

По истечении:

$$1 \text{ года } 50 - 50 \times 0,8 = 50 \times 0,2 = 10$$

$$2 \text{ лет } 10 + 50 \times 5 \times 0,2 = 10 + 10 \times 5$$

$$3 \text{ лет } 10 + 10 \times 5 + 5 \times 5 \times 50 \times 0,2 = 10 + 10 \times 5 + 10 \times 5^2$$

.....

$$10 \text{ лет } 10 + 10 \times 5 + 10 \times 5^2 + \dots + 10 \times 5^9.$$

Сумма членов последнего ряда чисел равна

$$\frac{10 \times 5^9 \times 5 - 10}{5 - 1} = \frac{10}{4} \times 5^{10} = \frac{5}{2} \times \left(\frac{10}{2}\right)^{10} \approx 2,5 \times \frac{10^{10}}{2^{10}}.$$

Но $2^{10} \approx 10^3$; поэтому искомая сумма приблизительно равна

$$2,5 \times \frac{10^{10}}{10^3} = 2,5 \times 10^7 = 25 \text{ млн.}$$

Кроличье стадо даже при потреблении 80% приплода достигло бы через 10 лет численности в десятки миллионов!

ПОКУПКА ЛОШАДИ

Задача

В старинной арифметике Магницкого мы находим следующую забавную задачу, которую привожу здесь, не сохраняя языка подлинника:

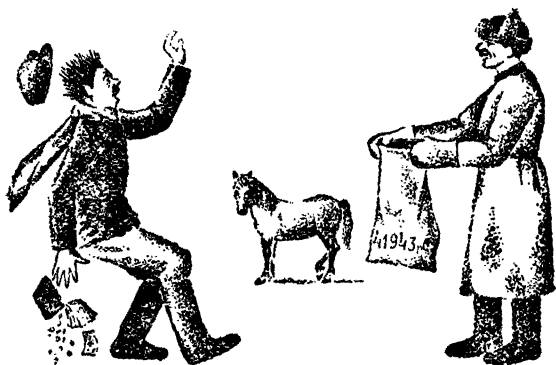


Рис. 37.

Некто продал лошадь за 156 руб. Но покупатель, приобретя лошадь, раздумал ее покупать и возвратил продавцу, говоря:

– Нет мне расчета покупать за такую цену лошадь, которая таких денег не стоит.

Тогда продавец предложил другие условия:

– Если по-твоему цена лошади высока, то купи только ее подковные гвозди, лошадь же получишь тогда в придачу бесплатно. Гвоздей в каждой подкове 6. За первый гвоздь дай мне всего $\frac{1}{4}$ коп., за второй – $\frac{1}{2}$ коп., за третий – 1 коп. и т. д.

Покупатель, соблазненный низкой ценой и желая даром получить лошадь, принял условия продавца, рассчитывая, что за гвозди придется уплатить не более 10 рублей.

На сколько покупатель проторговался?

Решение

За 24 подковных гвоздя пришлось уплатить

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{24-3}.$$

Сумма эта равна

$$\frac{2^{21} \times 2 - \frac{1}{4}}{2 - 1} = 2^{22} - \frac{1}{4} = 4\,194\,303 \frac{3}{4} \text{ коп.,}$$

т. е. около 42 тысяч рублей. При таких условиях не обидно дать и лошадь в придачу.

Любопытно, что известный знаток истории математики проф. В. В. Бобынин считал эту задачу ниоткуда Магницким не заимствованной, а придуманной им самостоятельно. Однако, она встречается в книге современного английского физика Лоджа «Легкая математика». Так как Лодж едва ли читал Магницкого, то ясно, что интересующая нас задача принадлежит к числу тех, которые столетия назад были придуманы неизвестными математиками из народа.

ВОЗНАГРАЖДЕНИЕ ВОИНА

Задача

Из другого старинного русского учебника математики, носящего пространное заглавие:

«Полный курс чистой математики, сочиненный Артиллерии Штык-Юнкером и Математики парти-

кулярным Учителем Ефимом Войтяховским в пользу и употребление юношества и упражняющихся в Математике» (1795),

заимствую следующую задачу:

«Служившему воину дано вознаграждение за первую рану 1 коп., за другую 2 коп., за третью 4 коп. и т. д. По исчислению нашлось, что воин получил всего вознаграждения 655 р. 35 к. Спрашивается число его ран».

Решение

Составляем уравнение:

$$65\ 535 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{x-1}$$

или

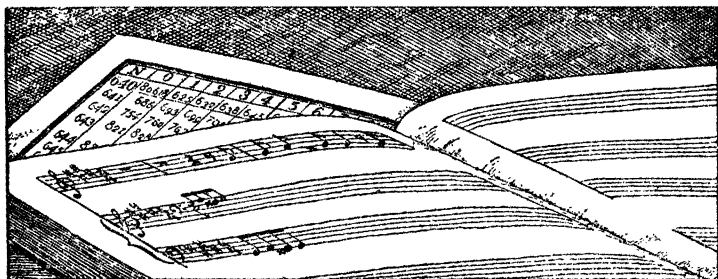
$$65535 = \frac{2^{x-1} \times 2 - 1}{2 - 1} = 2^x - 1,$$

откуда имеем

$$65\ 536 = 2^x \text{ и } x = 16,$$

– результат, который легко находим путем испытаний.

При столь великодушной системе вознаграждения боец должен получить 16 ран и остаться притом в живых, чтобы удостоиться награды в 655 р. 35 к.



Глава восьмая

СЕДЬМОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ

СЕДЬМОЕ ДЕЙСТВИЕ

Мы упоминали уже, что пятое действие – возвышение в степень – имеет два обратных. Если

$$a^b = c,$$

то разыскание a есть одно обратное действие – извлечение корня; нахождение же b – другое, логарифмирование. Полагаю, что читатель этой книги знаком с основами учения о логарифмах в объеме школьного курса. Для него, вероятно, не составит труда сообразить, чему, например, равно такое выражение:

$$a^{\lg_a b}.$$

Нетрудно понять, что если основание логарифмов (a) возвысить в степень логарифма числа b , то должно получиться это число b .

Для чего были придуманы логарифмы? Конечно, для ускорения и упрощения вычислений. Изобретатель первых логарифмических таблиц, гениальный матема-

тик-любитель Непер, так говорит о своих побуждениях:

– «Я старался, насколько мог и умел, отделаться от трудности и скуки вычислений, докучность которых обычно отпугивает весьма многих от изучения математики».

В самом деле, логарифмы чрезвычайно облегчают и ускоряют вычисления, – не говоря уже о том, что они дают возможность производить такие операции, которые без их помощи совершенно невыполнимы (извлечение корня любой степени). Не без основания писал Лаплас, что «изобретение логарифмов, сокращая вычисления нескольких месяцев в труд нескольких дней, словно удваивает жизнь астрономов». Великий математик говорит об астрономах, так как им приходится делать особенно сложные и утомительные вычисления. Но слова его с полным правом могут быть отнесены ко всем вообще, кому приходится иметь дело с числовыми выкладками.

Нам, привыкшим к употреблению логарифмов и к доставляемым ими облегчениям выкладок, трудно представить себе то изумление и восхищение, которое вызвали они при своем появлении. Современник Непера, талантливый математик Бригг, прославившийся позднее изобретением десятичных логарифмов, писал, получив сочинение Непера: «Своими новыми и удивительными логарифмами Непер заставил меня усиленно работать и головой и руками. Я надеюсь увидеть его летом, так как никогда не читал книги, которая нравилась бы мне больше и приводила, бы в большее изумление». Бригг осуществил свое намерение и направился в Шотландию, чтобы посетить изобретателя логарифмов. При встрече оба математика первые четверть часа безмолвно рассматривали друг друга; наконец Бригг сказал:

– «Я предпринял это долгое путешествие с единственной целью видеть вас и узнать, помощью какого орудия остроумия и искусства были вы приведены к первой мысли о превосходном пособии для астрономии – логарифмах. Впрочем, теперь я больше удивляюсь тому, что никто не нашел их раньше, – настолько кажутся они простыми после того, как о них узнаешь».

СОПЕРНИКИ ЛОГАРИФМОВ

Ранее изобретения логарифмов потребность в ускорении выкладок породила таблицы иного рода, помощью которых действие умножения заменяется не сложением, а вычитанием. Устройство этих таблиц основано на тождестве:

$$ab = \frac{(a + b)^2}{4} - \frac{(a - b)^2}{4},$$

в верности которого легко убедиться, раскрыв скобки.

Имея готовые четверти квадратов, можно находить произведение двух чисел, не производя умножения, а вычитая из четверти квадрата суммы этих чисел четверть квадрата их разности. Те же таблицы облегчают возвышение в квадрат и извлечение квадратного корня, а в соединении с таблицей обратных чисел – упрощают и действие деления. Их преимущество перед таблицами логарифмическими состоит в том, что помощью их получают результаты точные, а не приближенные. Зато они уступают логарифмическим в ряде других пунктов, практически гораздо более важных. В то время как таблицы четвертей квадратов позволяют перемножать только два числа, логарифмы дают возможность находить сразу произведение любого числа множителей, а кроме того – возвышать в любую сте-

пень и извлекать корни с любым показателем (целым или дробным). Вычислять, например, сложные проценты помощью таблиц четвертей квадратов нельзя.

Тем не менее таблицы четвертей квадратов издавались и после того, как появились логарифмические таблицы всевозможных родов. В 1856 г. во Франции вышли таблицы под заглавием:

«Таблица квадратов чисел от 7 до 100 миллионов, помощью которой находят точное произведение чисел весьма простым приемом, более удобным, чем помощью логарифмов. Составил Александр Коссар».

Идея эта возникает у многих, не подозревающих о том, что она уже давно осуществлена. Ко мне раза два обращались изобретатели подобных таблиц, как с новинкой, и очень удивлялись, узнав, что их изобретение имеет более чем трехсотлетнюю давность.

Другим, более молодым соперником логарифмов являются вычислительные таблицы, имеющиеся во многих технических справочниках. Это сводные таблицы, содержащие следующие графы: квадраты чисел, кубы, квадратные корни, кубические корни, обратные числа, длины, окружности и площади кругов для чисел от 2 до 1 000. Для многих технических расчетов таблицы эти очень удобны; однако, они не всегда достаточны; логарифмические имеют гораздо более обширную область применения.

ЭВОЛЮЦИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ТАБЛИЦ

В современных школах у нас чаще всего употребляются 5-значные, в Германии же – 4-х значные логарифмические таблицы. Следовало бы и нам остановиться окончательно на 4-х значных, так как они вполне достаточны для технических расчетов. А для боль-

шинства практических надобностей можно успешно обходиться даже 3-х значными мантиссами: ведь обиходные измерения редко выполняются более чем с тремя знаками. Мысль о достаточности более коротких мантисс осознана сравнительно недавно. Я помню еще время, когда в наших школах были в употреблении увесистые томы 7-значных логарифмов, уступившие свое место 5-значным лишь после упорной борьбы. Французский астроном Лаланд, составитель первых 5-значных таблиц, много способствовал их проникновению в школьный обиход заявлением, что все свои астрономические вычисления он выполняет именно по таким таблицам.

Но и 7-значные логарифмы при своем появлении (1794 г.) казались непозволительным новшеством. Первые десятичные логарифмы, созданные трудом лондонского математика Генриха Бригга (1624 г.), были 14-значные. Их сменили спустя несколько лет 10-значные таблицы голландского математика Андриана Влакка.

Как видим, эволюция ходовых логарифмических таблиц шла от многозначных мантисс к более коротким и не завершилась еще в наши дни, так как и теперь многими не осознана та простая мысль, что точность вычислений не может превосходить точности измерений.

Укорочение мантисс влечет за собой два важных практических следствия: 1) заметное уменьшение объема таблиц и связанное с этим 2) упрощение пользования ими, а значит – и ускорение выполняемых помощью их вычислений. Семизначные логарифмы чисел занимают около 200 страниц большого формата; 5-значные – 30 страничек вдвое меньшего формата; 4-хзначные занимают вдесятеро меньший объем, уме-

щаяся на двух страницах большого формата¹; трехзначные же могут поместиться на одной странице, как видно из приложенного в конце нашей книги образчика.

Что же касается быстроты вычислений, то один немецкий астроном (Энке) установил следующее соотношение: расчет, выполняемый по 5-значным таблицам, берет втрое меньше времени, чем по 7-значным.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ДИКОВИНКИ

Если вычислительные потребности практической жизни и технического обихода вполне обеспечивают 3- и 4-значными таблицами, то, с другой стороны, к услугам теоретического исследователя имеются таблицы и с гораздо большим числом знаков, чем даже 14-значные логарифмы Бригга. Вообще говоря, логарифм в большинстве случаев есть число иррациональное и не может быть выражен совершенно точно никаким числом цифр; логарифмы большинства чисел, сколько бы знаков ни брать, выражают их истинную величину лишь приближенно, – тем точнее, чем больше цифр в их мантиссе. Для научных работ оказывается иногда недостаточной точность 14-значных логарифмов²; но среди 500 всевозможных образцов логарифмических таблиц, вышедших в свет со времени их изобретения, исследователь всегда найдет такие, которые его удовлетворят. Назовем, например, 20-значные логарифмы чисел от 2 до 1200, изданные во Франции Калле (1795). Для еще более ограниченной груп-

¹ Исключение составляют 4-х значные таблицы Н. П. Каменщикова, которые вследствие нерационального устройства, по объему не уступают 5-значным.

² 14-значные логарифмы Бригга имеются, впрочем, только для чисел от 1 до 20000 и от 90 000 до 100000.

пы чисел имеются таблицы логарифмов с огромным числом десятичных знаков – настоящие логарифмические диковинки, о существовании которых, как я убедился, не подозревают и многие математики.

Вот эти логарифмы-исполины; все они не десятичные, а натуральные ¹:

48-значные таблицы Вольфрама для чисел до 10 000;

61-значные таблицы Шарпа;

102-значные таблицы Паркхерста и, наконец, логарифмическая сверхдиковинка:

260-значные логарифмы Адамса.

В последнем случае мы имеем, впрочем, не таблицу, а только так называемые натуральные логарифмы 5 чисел: 2, 3, 5, 7 и 10 и переводный (260-значный) множитель для перечисления их в десятичные. Нетрудно, однако, понять, что, имея логарифмы этих пяти чисел, можно простым сложением или умножением получить логарифмы множества составных чисел; например, логарифм 12 равен сумме логарифмов 2, 2 и 3, и т. п.

К логарифмическим диковинкам можно было бы с полным основанием отнести и счетную линейку – «деревянные логарифмы» – если бы этот остроумный прибор не сделался, благодаря своему удобству, столь же обычным счетным орудием для техников, как десятичносточковые счеты среди конторских работников. Привычка угашает чувство изумления перед прибором, работающим по принципу логарифмов и тем не менее не требующим от пользующихся им даже знания того, что такое логарифм.

¹ Натуральными называются логарифмы, вычисленные не при основании 10, а при основании числа 2,718..., о котором у нас еще будет речь впереди.

Подлинной логарифмической диковинкой является дорогой и редкий прибор для вычисления логарифмов. Утомительные и долгие выкладки заменяются работой остроумно придуманного механизма, который не только вычисляет один логарифм за другим, но и заготавливает типографский стереотип¹ для их печатания. Свыше 2½ страниц набора таблиц машина изготавливает за то время, пока самый искусный наборщик успеет набрать только одну страницу с готового оригинала.

ПРОСТЕЙШАЯ ТАБЛИЦА ЛОГАРИФМОВ

Самая простая логарифмическая таблица, вполне пригодная для практических целей, дана в конце настоящей книги. Это – трехзначные логарифмы в том виде, в каком они предложены английским физиком Лоджем и усовершенствованы мною (прибавлением готовых поправок). Способ обращения с таблицей не требует долгих пояснений; он ясен из сопровождающего ее текста. Такую табличку полезно иметь всегда при себе.

Впрочем, если в дороге или на экскурсии она при вас не окажется, вы без большого труда и обширных познаний в математике сами сможете ее вычислить. Вообще говоря, вычисление логарифмов – дело весьма не легкое, особенно когда желают получить мантиссу с большим числом знаков. Труд, затраченный на это составителями первых таблиц, – совершенно беспримечен в истории математики. Чтобы вычислить, например, логарифм 2, Бригг выполнил 47 последовательных извлечений квадратного корня из числа 1024, – каждое с 18 десятичными знаками! Этот египетский труд был

¹ Стереотип – клише используемое в типографском деле.

облегчен позднее, с тех пор, как в конце XVII в. математик Меркатор нашел более легкий и быстрый способ (логарифмический ряд).

Сейчас сказанное относится к логарифмам с многозначной мантиссой; трехзначные же логарифмы вычисляются весьма просто, если воспользоваться приемом, которым – в числе прочих – Бригг облегчал свою чудовищную вычислительную работу.

Вычислим, например, логарифм 2. Мы знаем, что $2^{10} = 1024$. Значит $10 \lg 2 = \lg 1024$ и

$$\lg 2 = \frac{\lg 1024}{10}.$$

Приблизненно – с точностью до двух цифр – мы можем принять, что $\lg 1024$ равен $\lg 1000$. Тогда, употребляя знак приближенного равенства,

$$\lg 2 \approx 0,30.$$

Ошибка, допущенная нами, равна $\frac{0,024}{10}$, т. е. 0,0024 от

2. Так как небольшую прибавку логарифма можно считать пропорциональную соответствующей прибавке числа, то приближенный результат 0,30 надо исправить прибавлением к нему 0,0024 его величины,

$$0,30 \times 0,0024 = 0,000720 \approx 0,001$$

$$\lg 2 = 0,30 + 0,001 = 0,301.$$

Сходным образом вычисляем $\lg 3$. При этом исходим из равенства $3^4 = 81$. Значит, $4 \lg 3 = \lg 81$

$$\lg 3 = \frac{\lg 81}{4} \approx \frac{\lg 80}{4}.$$

$$\text{Но } 80 = 10 \times 2^3; \lg 80 = 1 + 3 \lg 2 = 1,903$$

$$\lg 3 \approx \frac{1,903}{4} \approx 0,476.$$

Исправляем этот приближенный результат на $\frac{1}{4} \times \frac{1}{80}$, т. е. на $\frac{1}{320}$, или 0,003 его величины (округленной до 0,48)

$$\begin{aligned} 0,48 \times 0,003 &\approx 0,001 \\ 0,476 + 0,001 &= 0,477. \end{aligned}$$

Логарифмы 4, 5, 6 находим еще проще, потому что

$$\begin{aligned} \lg 4 &= 2 \lg 2 = 0,602 \\ \lg 5 &= \lg 10 - \lg 2 = 1 - 0,301 = 0,699 \\ \lg 6 &= \lg 2 + \lg 3 = 0,778. \end{aligned}$$

Чтобы найти $\lg 7$, подыскиваем такую степень 7, которая мало отличается от числа, получаемого перемножением чисел 2, 3 и 5. Бригг воспользовался равенством $7^4 = 2\,401$; последуем его примеру

$$\lg 7 = \frac{\lg 2\,401}{4} \approx \frac{\lg 2\,400}{4},$$

Но $2\,400 = 100 \times 2^3 \times 3$; значит, $\lg 2\,400 = 2 + 3 \lg 2 + \lg 3 = 2 + 0,903 + 0,477 = 3,380$.

$$\lg 7 = \frac{3,380}{4} = 0,845.$$

Исправлять этот логарифм нет надобности, так как соответствующая поправка, составляющая $\frac{1}{9600}$ его величины, не влияет на 3-ю цифру мантиссы.

Читатель, уловивший из этих примеров сущность приема, сам может вычислить другие логарифмы. Трудность представляют только числа простые; логарифмы чисел составных определяются, как суммы логарифмов их простых множителей. Что же касается простых чисел, то всегда можно найти подходящую степень или

кратное, которое нас выручит. Приведем несколько примеров.

Для вычисления $\lg 11$ мы, следуя Бриггу, можем воспользоваться равенством

$$\begin{aligned}99^2 &= 9\,801 \\3^2 \times 11^2 &\approx 9800 \\11^2 &\approx \frac{7^2 \times 2 \times 100}{3^2}\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\lg 11 \approx \frac{2 \lg 7 + \lg 2 + 2 - 2 \lg 3}{2}.$$

Так как $\lg 7$, $\lg 2$ и $\lg 3$ уже известны, то вычисление этим путем вполне возможно; поправка излишня.

Чтобы вычислить $\lg 13$, исходим из равенства

$$13^3 = 2\,197 \approx 2\,200.$$

Для $\lg 17$ прибегаем к равенству

$$17^3 = 4\,913 \approx 4900.$$

Для $\lg 19$ – к равенству

$$19^2 = 361 \approx 360.$$

Для $\lg 23$ – к равенству

$$\begin{aligned}23^2 &= 529 \approx 530 \\(\text{а } 53^2 &= 2\,809 \approx 2\,800).\end{aligned}$$

Для $\lg 29$ – к равенству

$$29^2 = 841 \approx 840.$$

Для $\lg 31$ – к равенству

$$31^2 = 961 \approx 960.$$

И так далее до $\lg 97$, который вычисляется помощью равенства

$$97^2 = 9\,409 \approx 9\,400.$$

Логарифмы же трехзначных чисел – 111 и т. д. – можно вычислять пропорциональным изменением логарифмов чисел – 110 и т. д. Только для 101, 102 и др. понадобится прибегнуть к степеням:

$$101^2 = 10\,201 \approx 10\,200 \approx 2 \times 3 \times 17 \times 100$$

и т. д.

ЛОГАРИФМЫ НА ЭСТРАДЕ

Самый поразительный из номеров, выполняемых перед публикой профессиональными счетчиками, без сомнения следующий. Предупрежденные афишей, что счетчик-виртуоз будет извлекать в уме корни высоких степеней из многозначных чисел, вы заготавливаете дома путем терпеливых выкладок 31-ю степень какого-ни-

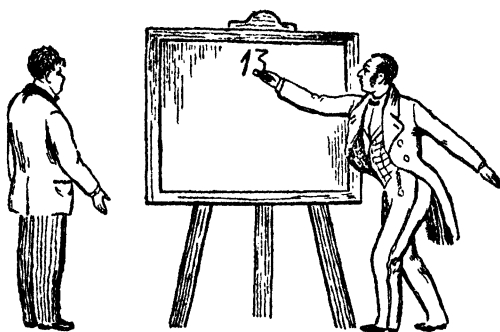


Рис. 38.

будь числа и намерены сразить счетчика 35-значным числовым линкором. В надлежащий момент вы обращаетесь к счетчику со словами:

– А попробуйте извлечь корень 31-й степени из следующего 35-значного числа! Запишите, я продиктую.

Виртуоз-вычислитель берет мел, но прежде чем вы успели открыть рот, чтобы произнести первую цифру, у него уже написан результат: 13.

Не зная числа, он извлек из него корень, да еще 31-й степени, да еще в уме, да еще с молниеносной быстротой!...

Вы изумлены, уничтожены, – а между тем во всем этом нет ничего сверхъестественного. Секрет просто в том, что существует только одно число, именно 13, которое в 31-й степени дает 35-значный результат. Числа меньшие 13 дают меньше 35 цифр, большие – больше.

Откуда, однако, счетчик знал это? Как разыскал он число 13? Ему помогли логарифмы, двузначные логарифмы, которые он помнит наизусть для первых 15–20 чисел. Затвердить их вовсе не так трудно, как кажется, особенно, если пользоваться тем, что логарифмы чисел составных равны сумме логарифмов их простых множителей. Зная твердо логарифмы 2, 3 и 7^1 , вы уже знаете логарифмы чисел первого десятка; для второго десятка требуется помнить логарифмы еще четырех чисел.

Как бы то ни было, эстрадный вычислитель мысленно располагает следующей табличкой двузначных логарифмов (см. на стр. 224).

Изумивший вас математический трюк состоял в следующем:

¹ Напомним, что $\lg 5 = \lg \frac{10}{2} = 1 - \lg 2$.

$$\lg \sqrt[31]{(35 \text{ цифр})} = \frac{34, \dots}{31}.$$

Искомый логарифм может заключаться между пределами

$$\frac{34}{31} \text{ и } \frac{34,99}{31}, \text{ или между } 1,09 \text{ и } 1,13.$$

В этом интервале имеется только логарифм одного целого числа, именно 1,11 – логарифм 13-ти. Таким путем и найден ошеломивший вас результат. Конечно, чтобы быстро проделать все это в уме, надо обладать находчивостью и сноровкой профессионала, – но по существу дело, как видите, достаточно просто. Вы и сами можете теперь проделывать подобные фокусы, если не в уме, то на бумаге.

Числа	Лог.	Числа	Лог.
2	0,3	11	1,04
3	0,48	12	1,08
4	0,6	13	1,11
5	0,7	14	1,15
6	0,78	15	1,18
7	0,84	16	1,20
8	0,9	17	1,23
9	0,95	18	1,25
		19	1,28

Предположим, вам предложена задача: извлечь корень 64-й степени из 20-значного числа.

Не осведомившись о том, что это за число, вы можете объявить результат извлечения: корень равен 2.

В самом деле

$$\lg \sqrt[64]{(20 \text{ цифр})} = \frac{19, \dots}{64};$$

он должен, следовательно, заключаться между

$$\frac{19}{64} \text{ и } \frac{19,99}{64}, \text{ т. е. между } 0,29 \text{ и } 0,31.$$

Такой логарифм для целого числа только один: 0,3, т. е. логарифм 2.

Вы даже можете окончательно поразить загадчика, сообщив ему, какое число он собирался вам продиктовать: знаменитое «шахматное» число

$$2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616.$$

ЛОГАРИФМЫ НА СКОТНОМ ДВОРЕ

Задача

Количество так называемого «поддерживающего» корма (т. е. то наименьшее количество его, которое лишь пополняет траты организма на теплоотдачу, работу внутренних органов, восстановление отмирающих клеток и т. п.)¹ пропорционально наружной поверхности тела животного. Зная это, определите калорийность поддерживающего корма для вола, весящего 420 кг, если при тех же условиях вол 630 кг весом нуждается в 13 500 калориях.

Решение

Чтобы решить эту практическую задачу из области животноводства, понадобится кроме алгебры привлечь

¹ В отличие от «продуктивного» корма, т. е. части корма, идущей на выработку продукции животного, ради которой оно содержится.

на помощь и геометрию. Согласно условию задачи, искомая калорийность x пропорциональна поверхности (s) вола, т. е.

$$\frac{x}{13\,500} = \frac{s}{s_1},$$

где s_1 – поверхность тела вола, весящего 930 кг. Из геометрии мы знаем, что поверхности (s) подобных тел относятся как квадраты из линейных размеров (l), а объемы (и, следовательно, веса) – как кубы линейных размеров. Поэтому

$$\frac{s}{s_1} = \frac{l^2}{l_1^2}; \quad \frac{420}{630} = \frac{l^3}{l_1^3}, \text{ и значит, } \frac{l}{l_1} = \frac{\sqrt[3]{420}}{\sqrt[3]{630}},$$

откуда

$$\frac{x}{13\,500} = \frac{\sqrt[3]{420}}{\sqrt[3]{630}} = \sqrt[3]{\left(\frac{420}{630}\right)^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$x = 13\,500 \sqrt[3]{\frac{4}{9}}.$$

Помощью логарифмических таблиц находим

$$x = 10\,300.$$

Вол нуждается в 10 300 калориях.

ЛОГАРИФМЫ В МУЗЫКЕ

Музыканты редко увлекаются математикой; большинство их, питая к этой науке чувство уважения, предпочитает держаться от нее подальше. Между тем музыканты – даже те, которые не проверяют, подобно Сальери у Пушкина, «алгеброй гармонию», – соприкасаются с математикой гораздо чаще, чем сами подозревают, и притом с такими страшными вещами, как логарифмы.



Позволю себе по этому поводу привести отрывок из статьи нашего известного физика проф. А. Эйхенвальда ¹.

«Товарищ мой по гимназии любил играть на рояле, но не любил математики. Он даже говорил с оттенком пренебрежения, что музыка и математика друг с другом ничего не имеют общего. «Правда, Пифагор нашел, какие-то соотношения между звуковыми колебаниями, – но ведь как раз пифагорова-то гамма для нашей музыки и оказалась неприменимой».

Представьте же себе, как неприятно был поражен мой товарищ, когда я доказал ему, что, играя по клавишам современного рояля, он играет, собственно гово-

¹ Она была напечатана в «Русск. астрономич. календаре на 1919 г.» и озаглавлена «О больших и малых расстояниях».

ря, на логарифмах... И действительно, так называемые «ступени» темперированной хроматической гаммы не расставлены на равных расстояниях ни по отношению к числам колебаний, ни по отношению к длинам волн соответствующих звуков, а представляют собою логарифмы этих величин. Только основание этих логарифмов равно 2, а не 10, как принято в других случаях.

Положим что нота *do* самой низкой октавы – будем ее называть нулевой октавой – определена n колебаниями в секунду. Тогда *do* первой октавы будет делать в секунду $2n$ колебаний, а m -й октавы $n \times 2^m$ колебаний и т. д. Обозначим все ноты хроматической гаммы рояля номерами p , принимая основной тон *do* каждой октавы за нулевой; тогда, например, тон *sol* будет 7-й, *la* будет 9-й и т. д.; 12-й тон будет опять *do*, только октавой выше. Так как в темперированной хроматической гамме каждый последующий тон имеет в $\sqrt[12]{2}$ большее число колебаний, чем предыдущий, то число колебаний любого тона можно выразить формулой

$$N_{pm} = n \times 2^m (\sqrt[12]{2})^p.$$

Логарифмируя эту формулу, получаем:

$$\lg N_{pm} = \lg n + m \lg 2 + p \frac{\lg 2}{12}$$

или

$$\lg N_{pm} = \lg n + \left(m + \frac{p}{12} \right) \lg 2,$$

а принимая число колебаний самого низкого *do* за единицу ($n = 1$) и переводя все логарифмы к основанию, равному 2 (или попросту принимая $\lg 2 = 1$), имеем

$$\lg_2 N_{pm} = m + \frac{p}{12}.$$

Отсюда видим, что номера клавишей рояля представляют собою логарифмы чисел колебаний соответствующих звуков. Мы даже можем сказать, что номер октавы представляет собою характеристику, а номер звука в данной октаве — мантиссу этого логарифма».

Например, — поясним от себя, — в тоне *sol* третьей октавы, т. е. в числе $3 + \frac{7}{12}$ ($= 3,083$), число 3 есть характеристика логарифма числа колебаний этого тона, а $\frac{7}{12}$ ($= 0,083$) — мантисса того же логарифма при основании 2; число колебаний, следовательно, в $2^{3,083}$, т. е. в 8,47 раза больше числа колебаний тона *do* первой октавы.

ЗВЕЗДЫ, ШУМ И ЛОГАРИФМЫ

Заголовок этот, связывающий столь, казалось бы, несоединимые вещи, не притязает быть пародией на произведения Кузьмы Пруtkова; речь в самом деле пойдет о звездах и о шуме в тесной связи с логарифмами.

Шум и звезды объединяются здесь потому, что и громкость шума и яркость звезд оцениваются одинаковым образом — по логарифмической шкале.

Астрономы распределяют звезды по степеням видимой яркости на светила первой величины, второй величины, третьей и т. д. Последовательные звездные величины воспринимаются глазом, как члены арифметической прогрессии. Но физическая яркость их изменяется по иному закону: объективные яркости составляют геометрическую прогрессию с знаменателем 2,5. Легко понять, что «величина» звезды представляет собою не что иное, как логарифм ее физической яркости. Звезда, например, 3-й величины ярче

звезды 1-й величины в $2,5^{(3-1)}$ т. е. в 6,25 раза. Короче сказать, оценивая видимую яркость звезд, астроном оперирует с таблицей логарифмов, составленной при основании 2,5. Не останавливаясь здесь подробнее на этих интересных соотношениях, так как им уделено достаточно страниц в другой моей книге «Занимательная астрономия».

Сходным образом оценивается и громкость шума. Вредное влияние промышленных шумов на здоровье рабочих и на производительность труда побудило выработать приемы точной числовой оценки громкости шума. Единицей громкости служит «бел», практически — его десятая доля, «децибел». Последовательные степени громкости — 1 бел, 2 бела и т. д. (практически — 10 децибел, 20 децибел и т. д.) составляют для нашего слуха арифметическую прогрессию. Физическая же «сила» этих шумов (точнее — энергия) составляет прогрессию геометрическую со знаменателем 10. Разности громкостей в 1 бел отвечает отношение силы шумов 10. Значит, громкость шума, выраженная в белах, равна десятичному логарифму его физической силы.

Дело станет яснее, если рассмотрим несколько примеров.

Тихий шелест листьев оценивается в 1 бел, громкая разговорная речь — в 6,5 бел, рычание льва — в 8,7 бел. Отсюда следует, что по силе звука разговорная речь превышает шелест листьев в

$$10^{(6,5-1)} = 10^{5,5} = 316\,000 \text{ раз};$$

львиное рычание сильнее громкой разговорной речи в

$$10^{(8,7-6,5)} = 10^{2,2} = 158 \text{ раз}.$$

Шум, громкость которого больше 8 бел, признается вредным для человеческого организма. Указанная

норма на многих заводах превосходится: здесь бывают шумы в 10 и более бел; удары молотка в стальную плиту порождают шум в 11 бел. Шумы эти в 100 и в 1 000 раз сильнее допустимой нормы и в 10 – 100 раз громче самого шумного места Ниагарского водопада (9 бел).

Случайность ли то, что и при оценке видимой яркости светил, и при измерении громкости шума мы имеем дело с логарифмической зависимостью между величиною ощущения и порождающего его раздражения? Нет, то и другое – следствие общего закона (называемого «психофизическим законом Фехнера»), гласящего: величина ощущения пропорциональна логарифму величины раздражения.

Как видим, логарифмы вторгаются и в область психологии.

ЛОГАРИФМЫ В ЭЛЕКТРООСВЕЩЕНИИ

Задача

Причина того, что наполненные газом (часто называемые – неправильно – «полуватными») лампочки дают более яркий свет, чем пустотные с металлическою нитью из такого же материала, кроется в различной температуре нити накала. По правилу, установленному в физике (Луммером), общее количество света, испускаемое при белом калении, растет пропорционально 12-й степени абсолютной температуры. Зная это, сделаем такое вычисление: определим, во сколько раз «полуватная» лампа, температура нити накала которой $2\,500^{\circ}$ абсолютной шкалы (т. е. при счете от -273°C), испускает больше света, чем пустотная с нитью накаленной до 2200° .

Решение

Обозначив искомое отношение через x , имеем уравнение

$$x = \left(\frac{2\,500}{2\,200} \right)^{12} = \left(\frac{25}{22} \right)^{12},$$

откуда

$$\lg x = 12 (\lg 25 - \lg 22); x = 4,6.$$

Наполненная газом лампа испускает света в 4,6 раза больше, нежели пустотная. Значит, если пустотная дает свет в 50 свечей, то наполненная газом при тех же условиях даст 230 свечей.

Сделаем еще расчет: какое повышение абсолютной температуры (в процентах) необходимо для удвоения яркости лампочки?

Решение

Составляем уравнение

$$\left(1 + \frac{x}{100} \right)^{12} = 2,$$

откуда

$$\lg \left(1 + \frac{x}{100} \right) = \frac{\lg 2}{12} \quad \text{и} \quad x = 6\%.$$

Наконец, третье вычисление: насколько – в процентах – возрастет яркость лампочки, если температура ее нити (абсолютная) поднимется на 1%?

Решение

Выполняя помощью логарифмов вычисление

$$x = 1,01^{12}$$

находим

$$x = 1,12.$$

Яркость возрастет на 12%.

Проделав вычисление для повышения температуры на 2%, найдем увеличение яркости на 28%; при повышении температуры на 3% – увеличение яркости на 43%.

Отсюда ясно, почему техника изготовления электроламп так заботится о повышении температуры нити накала, дорожа каждым лишним градусом.

ЗАВЕЩАНИЯ НА СОТНИ ЛЕТ

Кто не слышал о том легендарном числе пшеничных зерен, какое будто бы потребовал себе в награду изобретатель шахматной игры? Число это составилось путем последовательного удвоения единицы: за первое поле шахматной доски изобретатель потребовал 1 зерно, за второе 2 и т. д., все удваивая, до последнего 64-го поля. Однако, с неожиданной стремительностью числа растут не только при последовательном удвоении, но и при гораздо более умеренной норме увеличения. Капитал, приносящий 5% увеличивается ежегодно в 1,05 раза. Как будто едва заметное возрастание. А между тем, по прошествии достаточного промежутка времени капитал успевает вырасти в огромную сумму. Этим объясняется поражающее увеличение капиталов, завещанных на весьма долгий срок. Кажется странным, что, оставляя довольно скромную сумму, завещатель делает распоряжения об уплате огромных капиталов. Известно завещание знаменитого государственного деятеля, изобретателя громоотвода Веньямина Франклина. Оно опубликовано в «Собрании разных сочинений Веньямина Франклина». Вот извлечение из него:

«Препоручаю тысячу фунтов стерлингов бостонским жителям. Если они примут эту тысячу фунтов, то

должны поручить ее отборнейшим гражданам, а они будут давать их, с процентами по 5 на сто в год, в заем молодым ремесленникам ¹. Сумма эта через сто лет возысится до 131 000 фунтов стерлингов. Я желаю, чтобы тогда 100 000 фунтов употреблены были на постройку общественных зданий, остальные же 31 000 фунтов отданы были в проценты на 100 лет. По истечении второго столетия сумма возрастет до 4 061 000 фунтов стерлингов, из коих 1 060 000 фунтов оставляю в распоряжении бостонских жителей, а 3 000 000 – правлению Массачузетской коммуны. Далее не осмеливаюсь простирать своих видов».

Оставляя всего 1 000 фунтов, Франклин распределяет миллионы. Здесь нет, однако, никакого недоразумения. Математический расчет удостоверяет, что соображения завещателя вполне реальны. 1 000 фунтов, увеличиваясь ежегодно в 1,05 раза, через 100 лет должны превратиться в

$$x = 1\,000 \times 1,05^{100} \text{ фунтов.}$$

Это выражение можно вычислить с помощью логарифмов:

$$\lg x = \lg 1\,000 + 100 \lg 1,05 = 5,11\,893,$$

откуда

$$x = 131\,000,$$

в строгом соответствии с текстом завещания. Далее, 31 000 фунтов в течение следующего столетия превратятся в

$$y = 31\,000 \times 1,05^{100},$$

откуда, вычисляя помощью логарифмов, находим

$$y = 4\,076\,500$$

¹ В Америке в ту эпоху еще не было кредитных учреждений.

– сумму, несущественно отличающуюся от указанной в завещании.

Франклин умер в 1790 г.; первая часть его завещания, надо думать, была осуществлена; срок же исполнения прочих распоряжений истечет только в 1990 г.

Предоставляю читателю самостоятельно решить следующую задачу, почерпнутую из «Господ Головлевых» Салтыкова:

«Порфирий Владимирович сидит у себя в кабинете, исписывая цифирными выкладками листы бумаги. На этот раз его занимает вопрос: сколько было бы у него теперь денег, если бы маменька подаренные ему при рождении дедушкой на зубок сто рублей не присвоила себе, а положила в ломбард на имя малолетнего Порфирия? Выходит однако, не много: всего восемьсот рублей.»

Предполагая, что Порфирию в момент расчета было 50 лет и сделав допущение, что он произвел вычисление правильно (допущение мало вероятное, так как едва ли Головлев знал логарифмы и справлялся с сложными процентами), требуется установить, по сколько процентов платил в то время ломбард.

ДВА АМЕРИКАНСКИХ ДОЛГА

Остановимся еще на двух примерах быстрого роста капитала, выплывших в связи с полемикой западных держав о военных долгах. Первый пример связан с именем Бомарше – прославленного автора «Севильского цирюльника» и «Женитьбы Фигаро». Мало кому известно, что в эпоху войны американцев с Англией за независимость, Бомарше, по поручению правительства Людовика XVI, поставлял американцам контрабандным путем (под видом торговли табаком) военное снаряжение. Поставка производилась в кредит,

и сумма долга была в 1793 г. установлена Соединенными Штатами в размере 2 280 000 франков. Деньги, однако, не были Франции уплачены. О них просто забыли, и только в наши дни про долг вспомнили англичане, в связи с долговой полемикой, возгоревшейся между американскими и английскими публицистами. Было подсчитано, что если Соединенным Штатам предъявить обязательство уплаты долга Бомарше, то, считая из 5 сложных процентов, составила бы сумма долга свыше 2 000 млн. франков.

Проверим этот расчет. Начальный капитал – 2 280 000, срок – 140 лет, норма роста 5% (сложных).

Искомый капитал равен

$$2\,280\,000 \times 1,05^{140} = 2\,111\,200\,000 \text{ франков.}$$

Английский писатель Гриббл, вспомнивший о долге Бомарше, не кончает на Бомарше историю англо-американской войны. И дальнейшее изложение им истории англо-американской войны построено на той же теории сложных процентов. Мистер Гриббл предъявляет Соединенным Штатам, по его мнению, очень скромный счет. Его расчет таков: сумма, которую уплатили английские налогоплательщики на покрытие издержек по содержанию так называемых лойялистов, оставшихся верными Англии, составляет, по расчетам Гриббля, около 6 млн. фунтов стерлингов. Он не требует всей суммы, а хочет получить с Соединенных Штатов только 1 млн. фунтов, но из скромного расчета сложных пяти процентов за 150 лет. А это уже составило бы сумму в 1 024 млн. фунтов ст., т. е. большую, чем сумма военных долгов Англии Соединенным Штатам ¹. Проверим:

¹ «За рубежом», 1934.

$$1\,000\,000 \times 1,05^{150} = 1\,508\,400\,000 \text{ ф. ст.}$$

Расчет публициста, как видим, сильно преуменьшен.

Надо думать, он пользовался популярным правилом (верным лишь приближенно), что капитал из 5 сложных процентов удваивается каждые 15 лет; 10 удвоений дают 1024.

НЕПРЕРЫВНЫЙ РОСТ КАПИТАЛА

В сберкассах процентные деньги присоединяются к основному капиталу ежегодно. Если присоединение совершается чаще, то капитал растет быстрее, так как в образовании процентов участвует большая сумма. Возьмем чисто теоретический, весьма упрощенный пример. Пусть в сберкассе положено 100 руб. из 100% годовых. Если процентные деньги будут присоединены к основному капиталу лишь по истечении года, то к этому сроку 100 руб. превратятся в 200 руб. Посмотрим теперь, во что превратятся 100 рублей, если процентные деньги присоединять к основному капиталу каждые полгода. По истечении полугодия 100 руб. вырастут в

$$100 \times 1,5 = 150 \text{ руб.}$$

А еще через полгода в

$$150 \times 1,5 = 225 \text{ руб.}$$

Если присоединение делать каждые $\frac{1}{2}$ года, то по истечении года 100 руб. превратятся в $100 \times (1\frac{1}{2})^2 = 225$ руб. Будем уащать сроки присоединения процентных денег до 0,1 года, до 0,01 года и т. д. Тогда из 100 руб. спустя год получится:

$$100 \times 1,1^{10} = 259 \text{ руб.}$$

$$100 \times 1,01^{100} = 270 \text{ руб. } 50 \text{ коп.}$$

В подробных курсах алгебры доказывается, что при безграничном сокращении сроков присоединения наращенный капитал не растет беспредельно, а приближается к некоторому пределу, равному приблизительно ¹

$$271 \text{ р. } 83 \text{ к.}$$

Больше чем в 2,7183 раза капитал, положенный из 100% увеличиться не может, даже если бы наростшие проценты присоединялись к капиталу каждую секунду.

ЧИСЛО «е»

Сейчас полученное число 2,7183..., играющее в высшей математике огромную роль, – не меньшую, пожалуй, чем знаменитое число π , – имеет особое обозначение: e . Это число иррациональное: оно не может быть точно выражено конечным числом цифр ², но вычисляется только приближенно, с любой степенью точности, с помощью следующего ряда:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \dots$$

Из приведенного выше примера с ростом капитала по сложным процентам легко видеть, что число e есть предел выражения

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

при беспредельном возрастании n .

¹ Дробные доли копейки мы отбросили.

² Кроме того, оно, как и число π трансцендентно, т. е. не может получиться в результате решения какого бы то ни было алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами.

По многим причинам, которых мы здесь изложить не можем, число e очень целесообразно принять за основание системы логарифмов. Такие таблицы («натуральных логарифмов» существуют и находят себе широкое применение в науке и технике. Те логарифмы-исполины из 48, из 61, из 102 и из 260 цифр, о которых мы говорили ранее имеют основанием именно число e .

Число e появляется нередко там, где его вовсе не ожидали. Поставим себе, например, такую задачу:

На какие части надо разбить данное число a , чтобы произведение всех частей было наибольшее?

Мы уже знаем, что наибольшее произведение при постоянной сумме дают числа тогда, когда они равны между собой. Ясно, что число a надо разбить на равные части. Но на сколько именно равных частей? На две, на три, на десять? Приемами высшей математики можно установить, что наибольшее произведение получается, когда части возможно ближе к числу e .

Например, 10 надо разбить на такое число равных частей, чтобы части были возможно ближе к 2,7183... Для этого надо найти частное

$$\frac{10}{2,718 \dots} = 3,679 \dots$$

Так как разделить на 3,679... равных части нельзя, то приходится выбрать делителем ближайшее целое число – 4. Мы получим, следовательно, наибольшее произведение частей 10-ти, если эти части равны $\frac{10}{4}$, т. е. 2,5.

Значит

$$(2,5)^4 = 39,0625$$

есть самое большое число, какое может получиться от перемножения частей числа 10-ти. Действительно, разделив 10 на 3 или на 5 равных частей, мы получим меньшие произведения:

$$\left(\frac{10}{3}\right)^3 = 37; \quad \left(\frac{10}{5}\right)^5 = 32;$$

Число 20 надо для получения наибольшего произведения его частей разбить на 7 частей, потому что

$$20 : 2,718 = 7,37 \approx 7.$$

Число 50 надо разбить на 18 частей, а 100 – на 37, потому что

$$50 : 2,718 = 18,4$$

$$100 : 2,718 = 36,8.$$

Что касается других применений числа e , то о разнообразии вопросов, при математическом рассмотрении которых приходится пользоваться этим числом, можно судить хотя бы по подзаголовкам статьи проф. М. Гребенча «Число e и его значение в естествознании и технике» (см. сборник «Математика и физика в средней школе», 1934, № 2):

Барометрическая формула.

Формула Эйлера ¹.

Работа сжатия воздуха.

Скорость уменьшения стоимости оборудования.

Закон Ньютона (для охлаждения тел).

Распад радия и возраст Земли.

Рост клеток.

Прибавлю к этому еще формулу Циолковского для вычисления скорости ракеты (см. мою книгу «Межпланетные путешествия»).

СКОЛЬКО ЛЮДЕЙ ЖИЛО НА СВЕТЕ?

Стремительное нарастание чисел, увеличивающихся в геометрической прогрессии, дает иногда повод к

¹ О ней см. ст. «Жюль-Верновский силач и формула Эйлера» во 2-й книге моей «Занимательной физики».

ошибочным заключениям. Поучительный пример подобного заблуждения оставил нам поэт Бенедиктов, посвящавший свой досуг занятиям математикой, вернее – математическим развлечениям. Сохранилась составленная им рукописная «увеселительная арифметика», с которой я имел возможность познакомиться. Последняя глава ее носит название «Громадное число живших на земном шаре его обитателей» и заключает любопытный подсчет.

«Предположим, что первоначально от одной пары людей произошло две пары, что от каждой из этих пар произошло по две пары, и потом каждая пара производит две пары. По этому предположению размножение на земле людей шло в геометрической прогрессии: 1, 2, 4, 8, 16, 32... Возьмем столько членов этой прогрессии, сколько могло пройти человеческих поколений в течение 7376 лет. [Бенедиктов наивно опирался на библейские данные о древности человечества.] Положим на каждое поколение 50 лет». Насчитывая всех поколений, начиная от первой пары человеческих существ, 140 и беря 140 членов прогрессии, автор приходит к выводу, что число всех живших на Земле людей достигает 4 септаллионов. «Половину из этого числа отбросим, принимая в соображение, что многие из родившихся умирают в младенчестве... Значит, останемся только при двух септаллионах». Септаллионом Бенедиктов называет единицу с 42 нулями, т. е. 10^{42} .

Далее, вес этого количества людей – «160 септаллионов фунтов» – он сопоставляет с «весом» земного шара, который принимает в 3,5 квадриллиона фунтов (вместо 14 квадриллионов). Результат получается поистине разительный: общий вес всех прежде живших людей превышает вес земного шара в 1 600 биллионов раз (приводим исправленную цифру). «Это показывает, –

заключает автор, – что один и тот же вещественный материал, из которого формировались телесные составы живших на свете людей, был в обороте по крайней мере 1600 биллионов раз, и за каждую вещественную частицу, перебивавшую в различных живых человеческих телах, могли бы спорить 1 600 биллионов индивидуумов».

Результат станет еще поразительнее, если принять во внимание соображение, что человечество произошло не от одной пары предков, а от многих, и что существует оно никак не 7000 лет, а несколько сот тысячелетий. Далее, надо иметь в виду, что «в формировании телесных составов» людей участвовала не вся масса земного шара, а только масса поверхностного слоя нашей планеты, составляющего незначительную часть всего объема Земли. Наконец, в споре за «каждую вещественную частицу, перебивавшую в живых телах», должно было предъявить свои права и бесчисленное множество животных, населявших нашу планету, начиная с древнейших геологических эпох.

Явная несообразность, к которой мы пришли, показывает, что в ходе этого рассуждения кроется какая-то существенная ошибка.

Неправильность расчета обнаружилась бы и для его автора, если бы он догадался исчислить на основании своего рассуждения, сколько должно жить на земном шаре людей в тот момент, когда он писал свою книгу. Какова численность современного Бенедиктову 140-го поколения людей? Она равна $2^{140} \approx 10^{37}$, между

¹ Кроме того, если бы человечество размножалось по норме, указанной Бенедиктовым, то, приняв наличную численность человечества (1 300 000 000) за последний член прогрессии со знаменателем 2, легко было определить сумму всех ее членов 2 600 000 000. Странно, что столь простая мысль не пришла в голову Бенедиктову.

тем как в действительности тогда жило на Земле всего около 10^9 человек... Разница огромная, прямо указывающая на полную несостоятельность расчета ¹.

В чем ошибка Бенедиктова?

Она заключается в том, что норма увеличения численности человечества, – два удвоения в столетие, – приблизительно верная для нашего времени, была незаконно распространена на все предшествовавшие времена вплоть до самой отдаленной эпохи. Между тем несомненно, что в древности смертность была гораздо выше, и следовательно, человечество размножалось значительно медленнее, чем в близкую нам эпоху. Даже в исторические времена бывали периоды, когда население целых стран не увеличивалось, а, напротив, уменьшалось; достаточно вспомнить эпоху тридцатилетней войны в Германии или чуму в Англии в XIV в., когда число обитателей страны уменьшилось более чем на 30%. Легко представить себе, какие опустошения производили войны, эпидемии и стихийные бедствия в ранний период существования человечества. Без сомнения, бывали периоды, – длившиеся, быть может, долгий ряд тысячелетий, – когда челове-

¹ Вероятная численность населения земного шара в отдаленные и в более близкие к нам эпохи такова:

в начале	нашей эры	80	млн.
» 1000-м	году	150	«
» 1500-м	году	250	«
» 1600-м	году	300	«
» 1700-м	году	450	«
» 1800-м	году	800	«

Мы видим, что с удалением в глубь веков человечество размножалось все медленнее. Если в близкую к нам эпоху население Земли удваивалось в сто лет, то в отдаленные времена для его удвоения требовалось целое тысячелетие. Еще в более ранние эпохи человечество удваивало свою численность вероятно в течение десятков тысяч лет.

чество временно вымирало, т. е. численность его шла на убыль. Допустимо ли при таких условиях говорить о непрерывном размножении человечества по правилу геометрической прогрессии ¹?

Мы можем, конечно, с весьма грубым приближением принять, что в среднем человечество размножалось все же по правилу возрастающей прогрессии, а именно считать, что по истечении, например, каждого тысячелетия численность его увеличилась в некоторое одинаковое число раз. Но тогда задачу, поставленную Бенедиктовым, надо решать совсем с другого конца. В прогрессии размножения человечества мы должны считать известным: последний член, т. е. нынешнюю численность населения земного шара, 2 000 000 000; число членов, т. е. число протекших тысячелетий – предположительно, конечно; остановимся, например, на 300 тысячелетиях; первый член, т. е. число первоначальных предков – еще более гадательно; примем, например, 100 предков. Знаменатель же этой прогрессии, который Бенедиктов считал исходным данным, нам придется вычислить, чтобы определить сумму ее членов. Пусть знаменатель прогрессии x , т. е. пусть численность человечества вырастает каждое тысячелетие в x раз. К концу 300-го тысячелетия 100 предков должны были превратиться в

$$100 x^{300}.$$

Так как число это должно равняться 2 000 000 000, или 2×10^9 , то имеем уравнение

$$100 x^{300} = 2 \times 10^9.$$

Логарифмируя, получаем

$$\lg 100 + 300 \lg x = \lg 2 + 9$$

$$\lg x = \frac{7,30103}{300} = 0,02433$$

$$x = 1,06.$$

Результат поучительный: численность человечества возрастала (в среднем) каждое тысячелетие на 6%, между тем как по Бенедиктову она удваивалась каждые 50 лет, т. е. за тысячелетие увеличилась в $2^{20} = 1\,048\,576$ – более чем в миллион раз!

Разница огромная, а отсюда и несообразный результат подсчета Бенедиктова.

Теперь попытаемся составить себе представление о том, каково в действительности могло быть число людей, живших на земном шаре за все время существования человечества. Будем считать, что в среднем наличное число людей успевает умереть и смениться новым в течение 50 лет. Если бы мы могли подсчитывать население земного шара каждые 50 лет, делая это в течение 300 000 лет, у нас получился бы ряд чисел, сумма которых составляла бы общую численность всех проживавших на Земле людей. Первые его 20 членов будут

$$100; \quad 100; \quad 100 \quad \text{и т. д.}$$

Следующие 20 членов

$$106; \quad 106; \quad 106 \quad \text{и т. д.}$$

Дальше пойдут 20 членов, каждый из которых равен

$$100(1,06)^2.$$

Затем 20 членов по $100(1,06)^3$ каждый и т. д.

Последними 20 членами будет нынешняя численность человечества – 2×10^9 .

Нетрудно определить сумму членов такого ряда: она составляет

$$20 \times \frac{2 \times 10^9 \times 1,06 - 100}{1,06 - 1} \approx 20 \times 2 \times 10^9 \times 17 = 68 \times 10^{10}.$$

Вот сколько – по весьма, конечно, приблизительной оценке – жило на свете людей за время существования нашей планеты. Число это всего в 340 раз превышает современное население земного шара и ничтожно мало по сравнению с абсурдно-огромным числом Бенедиктова.

Если представить себе, что объем всех этих человеческих тел равномерно распределен по поверхности земных материков, то высота слоя оказалась бы меньше $\frac{1}{2}$ миллиметра (у Бенедиктова же – сумма всех человеческих тел в 1 600 биллионов раз превышает объем нашей планеты!).

Ошибку Бенедиктова делают и те богословы которые пытались математическими расчетами подтвердить справедливость свидетельств Библии. Вот образчик такого рассуждения из статьи французского математика аббата Муанье «Древность человеческого рода» (1863 г.).

«Примем для годового возрастания народонаселения число $\frac{1}{227}$ [следовало сказать: $1 \frac{1}{227}$. Я. П.], мало отличающееся от того, которое представляет действительное возрастание населения во Франции, и вспомним, что в 1600 г. от сотворения мира Ной вышел из ковчега с тремя сыновьями и тремя их женами, – тогда после 4207 лет [библейский счет!] число жителей на Земле должно равняться

$$7 \left(1 + \frac{1}{227} \right)^{4207} = 1\,300\,000\,000,$$

т. е. истинному числу обитателей земного шара (в 1863 г.)».

Муанье видит в таком полном согласии подтверждение правильности свидетельств Библии. Излишне добавлять, после сказанного ранее, что весь этот благочестивый расчет основан на грубом заблуждении.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ КОМЕДИЯ

Задача

В добавление к тем математическим комедиям, с которыми читатель познакомился в главе V, приведем еще образчик того же рода, а именно «доказательство» неравенства $2 > 3$. На этот раз в доказательстве участвует логарифмирование. «Комедия» начинается с неравенства

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$$

бесспорно правильного. Затем следует преобразование:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

также не внушающее сомнения. Большему числу соответствует больший логарифм; значит,

$$2 \lg_{10} \left(\frac{1}{2}\right) > 3 \lg_{10} \left(\frac{1}{2}\right).$$

После сокращения на $\lg_{10} \left(\frac{1}{2}\right)$ имеем

$$2 > 3.$$

В чем ошибка этого доказательства?

Решение

Ошибка в том, что при сокращении на $\lg_{10} \left(\frac{1}{2}\right)$ не был изменен знак неравенства ($>$ на $<$); между тем, необходимо было это сделать, так как $\lg_{10} \left(\frac{1}{2}\right)$ есть число отрицательное. [Если бы мы логарифмировали при основании не 10, а другом, меньшем, чем $\frac{1}{2}$, то $\lg \left(\frac{1}{2}\right)$ был бы положителен, но мы не вправе были бы тогда утверждать что большему числу соответствует больший логарифм.]

ЛЮБОЕ ЧИСЛО – ТРЕМЯ ДВОЙКАМИ

Задача

Закончим книгу остроумной алгебраической головоломкой, которой развлекались несколько лет назад участники съезда физиков в Одессе.

Предлагается задача: любое данное число, целое и положительное, изобразить помощью трех двоек и математических символов.

Решение

Покажем, как задача решается сначала на частном примере. Пусть данное число 3. Тогда задача решается так:

$$3 = -\lg_2 \lg_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}.$$

Легко удостовериться в правильности этого равенства. Действительно,

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = \left[(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2^3}} = 2^{2^{-3}}$$

$$\lg 2^{2^{-3}} = 2^{-3}$$

$$-\lg_2 2^{-3} = 3.$$

Если бы дано было число 5, мы разрешили бы задачу тем же приемом:

Как видим, мы используем здесь то, что при квадратном радикале показатель корня не пишется.

$$5 = -\lg_2 \lg_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}.$$

Общее решение задачи таково. Если данное число N то

$$N = -\lg_2 \lg_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{\sqrt{2}}}}}_{N \text{ раз}},$$

причем число радикалов равно числу единиц в заданном числе.

УПОТРЕБЛЕНИЕ ТАБЛИЦЫ ЛОГАРИФМОВ

Нахождение логарифма

1) Найти $\lg 138$.

На пересечении строки «1,3» и графы «8» находим мантиссу 140. Характеристику (2) определяем по соотношению. Имеем: $\lg 138 = 2,140$.

2) Найти $\lg 5,27$.

На пересечении строки «5» и графы «2» находим мантиссу 716 для числа 52. Поправку для третьей цифры отыскиваем в той же строке в графе поправок под цифрой 7. Здесь же находим 6. Следовательно, мантисса для 527 равна $716 + 6 = 722$ и $\lg 5,27 = 0,722$.

3) Найти $\lg 0,608$.

На пересечении строки «6» и графы «0» находим мантиссу 778. Поправку для третьей цифры отыскиваем в той же строке, в графе поправок под цифрой 8. Здесь же находим 5. Следовательно, мантисса для 608 равна $778 + 5 = 783$ и на $\lg 0,608 = 1,783$.

Нахождение числа

4) Найти число, логарифм которого 1,193.

Отыскав мантиссу 193, мы видим, что она отвечает числу 156. Следовательно, $1,193 = \lg 15,6$.

5) Найти число, логарифм которого 1,927.

В таблице нет мантиссы 927. Ближайшая меньшая мантисса, 924, отвечает числу 84. Поправку числа для недостающих 3-х единиц мантиссы отыскиваем в графе поправок над цифрой 3 той же строки, где взята была мантисса; над тройками стоят сверху графы цифры 5 и 6. Следовательно, мантисса 927 отвечает 845 или 846, а искомое число 0,845 или 0,846. Определить число точнее в этом случае нельзя.

ТРЕХЗНАЧНЫЕ ЛОГАРИФМЫ

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9									
1,0	000	004	009	013	017	021	025	029	033	037	$\lg \pi = 0,497$ $\lg 2\pi = 0,798$ $\lg \sqrt{2} = 0,150$ $\lg \sqrt{3} = 0,239$								
1,1	041	045	049	053	057	061	064	068	072	076									
1,2	079	083	086	090	093	097	100	104	107	111									
1,3	114	117	121	124	127	130	134	137	140	143									
1,4	146	149	152	155	158	161	164	167	170	173									
1,5	176	179	182	185	188	190	193	196	199	201									
1,6	204	207	210	212	215	217	220	223	225	228									
1,7	230	233	236	238	241	243	246	248	250	253									
1,8	255	258	260	262	265	267	270	272	274	276	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,9	279	281	283	286	288	290	292	294	297	299									
2	301	322	342								2	4	6	8	10	12	14	16	18
2				362	380	398					2	4	5	7	9	11	12	14	16
2							415	431	447	462	2	3	5	6	8	10	11	13	14
3	477	491	505	519							1	3	4	6	7	8	10	11	12
3					531	544	556	568	580	591	1	2	4	5	6	7	8	10	11
4	602	613	623	633	643	653					1	2	3	4	5	6	7	8	9
4							663	672	681	690	1	2	3	4	5	5	6	7	8
5	699	708	716	724	732	740	748	756	763	771	1	2	2	3	4	5	6	6	7
6	778	785	792	799	806	813	820	826	833	839	1	1	2	3	3	4	5	5	6
7	845	851	857	863	869	875	881	886	892	898	1	1	2	2	3	3	4	5	5
8	903	908	914	919	924	929	935	940	944	949	1	1	2	2	3	3	4	4	5
9	954	959	964	968	973	978	982	987	991	996	0	1	1	2	2	3	3	4	4
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
-------------------	---

Глава первая. Пятое математическое действие.

Пятое действие	5
Астрономические числа	7
Сколько весит весь воздух?	9
Горение без пламени и жара	10
Разнообразие погоды	11
Замок с секретом	13
Двойники	14
Итоги повторного удвоения	15
Необычайное лекарство	17
Четырьмя единицами	21
Тремя двойками	21
Тремя тройками	22
Тремя четверками	23
Тремя одинаковыми цифрами	23
Четырьмя двойками	24
Мыслительные машины	27
Литературный автомат	32
Музыкальный спор	39
Секрет шахматного автомата	41
Число возможных шахматных партий	42

Глава вторая. Язык алгебры

Искусство составлять уравнения	45
Жизнь Диофанта	46
Лошадь и мул.	47
Четверо братьев	48
Птицы у реки.	50
Продажа часов	51
Прогулка	53

Задача Льва Толстого	54
Коровы на лугу	58
Задача Ньютона	60
Семеро игроков	62
Численность племени	64
Мнимая нелепость	65
Уравнение думает за нас	66
Курьезы и неожиданности	67
В парикмахерской	70
Трамвай и пешеход	72
Две жестянки кофе	73
На пути к заводу	74
Вечеринка	75
Морская разведка	76
На велодроме	78
Эскалатор метро	79
Состязание автомобилей	80
Средняя скорость езды	83
Машины для решения уравнений	84

Глава третья. В помощь арифметике и геометрии

Мгновенное умножение	87
Цифры 1, 5 и 6	90
Числа 25 и 76	91
Доплата	92
Делимость на 11	94
Делимость на 19	96
Пифагоровы числа	98
Теорема Софии Жермен	101
Составные числа	101
Число простых чисел	104
Ответственный расчет	105
Когда без алгебры проще	108
В помощь геометрии	109

Глава четвертая. Диофантовы уравнения

Покупка шляпы	113
Ревизия кооператива	118
Покупка почтовых марок	121
Покупка фруктов	122

Отгадать день рождения	124
Продажа кур	125
Два числа и четыре действия	127
Какой прямоугольник?	129
Два двузначных числа	130
Обмен часовых стрелок	131
Сто тысяч за доказательство теоремы	135

Глава пятая. Шестое математическое действие

Шестое действие	142
Накидки	144
Из задач Эдисона	145
Что больше?	147
Решить одним взглядом	148
Алгебраические парадоксы	149

Глава шестая. Уравнения второй степени

Рукопожатия	153
Пчелиный рой	155
Стая обезьян	156
Предусмотрительность уравнений	157
Задача Эйлера	159
Громкоговорители	161
Алгебра лунного перелета	163
«Трудная задача»	166
Сумма кубов	168
Какие числа?	169
Два поезда	170
Где устроить полустанок?	173
Как провести шоссе?	175
Когда произведение наибольшее?	177
Когда сумма наименьшая?	181
Брус наибольшего объема	181
Два земельных участка	182
Бумажный змей	183
Постройка дома	184
Жолоб наибольшего сечения	186
Воронка наибольшей вместимости	189
Самое яркое освещение	190

Глава седьмая. Прогрессии

Древнейшая прогрессия.....	194
Алгебра на клетчатой бумаге	195
Поливка огорода	197
Куриное стадо.....	198
Артель землекопов.....	199
Яблоки.....	201
Новость.....	202
Прогрессия размножения	203
Разведение кроликов.....	207
Покупка лошади.....	209
Вознаграждение воина.....	210

Глава восьмая. Седьмое математическое действие

Седьмое действие.....	212
Соперники логарифмов	214
Эволюция логарифмических таблиц	215
Логарифмические диковинки.....	217
Простейшая таблица логарифмов.....	219
Логарифмы на эстраде	223
Логарифмы на скотном дворе.....	226
Логарифмы в музыке.....	227
Звезды, шум и логарифмы.....	230
Логарифмы в электроосвещении.....	232
Завещания на сотни лет	234
Два американских долга.....	236
Непрерывный рост капитала	238
Число «е»	239
Сколько людей жило на свете?.....	241
Логарифмическая комедия	248
Любое число - тремя двойками	249
Употребление таблицы логарифмов	250
Трехзначные логарифмы	251

Яков Исидорович Перельман
ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АЛГЕБРА

Компьютерная верстка,
обработка иллюстраций
М. Судакова

Дизайн обложки,
подготовка к печати
А. Яскевич

Подписано в печать 01.03.2017

Объем 8 печ. л.

Тираж 3000 экз.

Заказ № 3032

ООО «СЗКЭО»

Телефон в Санкт-Петербурге: +7 (812) 365-40-44

E-mail: knigi@szko.ru

Отпечатано:

Первая Академическая типография «Наука»
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, дом 12/28



СЗКЭО

Санкт-Петербург



Когда в Голлолу настанет полночь,
В Ленинграде наступает полдень.
В этот час в Ленинграде,
Фонтанка, 34,
Ежедневно открываются двери
Дома занимательной науки,
В котором вам расскажут
О времени, о Земле, о небе,
О числах, о цвете, о звуке
И о многом другом.
(Афиша при входе в музей)

«Дом занимательной науки», он же ДЗН (что созвучно со школьным звонком) — так назывался музей, открытый по инициативе Я. И. Перельмана 15 октября 1935 года в правом флигеле Фонтанного дома. В залах астрономии, физики, математики и географии посетителей всех возрастов ожидали настоящие чудеса: мебель без видимой причины меняла свой цвет, торговые весы безошибочно отгадывали любое число или фамилию, кипящий чай в буфете разливали из бутылки, стоящей на льду, а книга предложений сама открывалась на нужной странице, стоило перед ней сесть; все экспонаты требовалось трогать руками и даже пытаться сломать.

ДЗН действовал до 29 июня 1941 года и успел принять более полу-миллиона человек. В нем работало множество кружков, проводились научные олимпиады, его сотрудники читали лекции на предприятиях, в школах и воинских частях, а также издавали серию научно-популярных книг по различным отраслям знаний, которая так и называлась — «Дом занимательной науки».

«Занимательная алгебра» ставит себе целью воспитать в читателе вкус к занятию алгеброй и возбудить охоту самостоятельно пополнить по учебным книгам пробелы своей подготовки.

ISBN 978-5-9603-0415-3



9 785960 304153 >

EAC

6+

ПЕРЕЛЬМАН

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АЛГЕБРА

